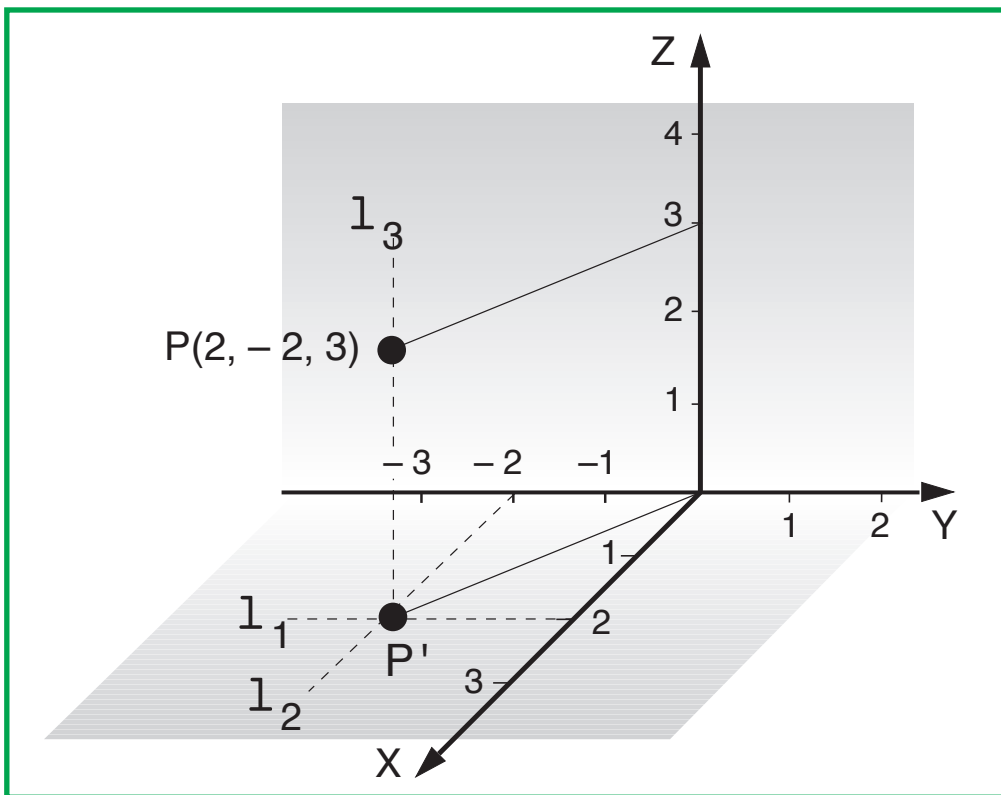


MATEMÁTICA

Quinto Año de Bachillerato



JÚPITER FIGUERA YIBIRÍN

JÚPITER FIGUERA YIBIRÍN
Profesor de los Dptos. de Física e Ingeniería Eléctrica
Universidad de Oriente
Venezuela

MATEMÁTICA
QUINTO AÑO BACHILLERATO

MATEMÁTICA
5º AÑO BACHILLERATO

Textos, Maquetación, dibujos:
Júpiter Figuera

Editor (PDF):
Júpiter Figuera

Diseño de Portada:
Júpiter Figuera

ISBN: 980-262-493-4

Prohibida su reproducción parcial o total por cualquier medio.

Cumaná, Venezuela, 19 de mayo 2018

Agradecimiento

Las siguientes personas fueron piezas fundamentales en la elaboración y revisión de este libro de texto:

Br. Francisco Betancourt
Prof. Rubén Gómez
Sra. Anamary Vásquez
Sr. Carlos José Alfonzo

A ellos mi palabra de reconocimiento y aprecio.

Dedicatoria

A mi madre, ejemplo de ternura y devoción.

PREFACIO

Este libro de texto completa la serie de Matemática del autor correspondiente al bachillerato. Al igual que en mis obras anteriores, se ha tratado de mantener un alto estándar de calidad, tanto en el aspecto conceptual como en el de la presentación de la información. Una cantidad apreciable de ejemplos resueltos ayudan notablemente a completar el estudio teórico de los diversos temas. Consciente de que el estudiante de la presente obra está a punto de iniciar estudios universitarios, se ha elevado el nivel de exigencia en algunos tópicos, lo que seguramente redundará en una mejor preparación para afrontar nuevos retos para lograr una robusta formación.

La época que nos toca vivir actualmente exige un esfuerzo sostenido de todos los que observamos con angustia el estado de deterioro en los sistemas de aprendizaje. Este drama se hace más crítico en el sector educativo, base fundamental para construir fuertes estructuras sociales. De allí la necesaria reflexión que debemos hacer quienes estamos envueltos en la formación de nuestra juventud para inculcar los valores de la honestidad, el estudio permanente y la constancia, imprescindibles para lograr una sólida base en los conceptos científicos esenciales.

Júpiter Figuera Yibirín
Cumaná (Venezuela), mayo 19, 2018

CONTENIDO

CAPÍTULO 1: VECTORES EN EL ESPACIO

1.1	Conceptos primitivos: El punto, la recta, el plano y el espacio	1
1.2	El plano R^2 . Representación de puntos en el plano R^2	4
1.3	El espacio R^3 . Representación de puntos en R^3	5
1.4	Puntos notables en R^3	9
1.5	Vectores en el plano	11
1.6	Vectores en el plano R^3	14
1.7	Magnitud y dirección de un vector en R^3	16

CAPÍTULO 2: ALGEBRA VECTORIAL

2.1	Adición de vectores	22
2.2	Representación geométrica del vector suma	23
2.3	Propiedad conmutativa de la adición de vectores	23
2.4	Propiedad asociativa de la adición de vectores	24
2.5	Elemento neutro en la adición de vectores	25
2.6	Elemento simétrico en la adición de vectores	25
2.7	Multiplicación de un vector por un número real	26
2.8	Propiedad distributiva de la multiplicación por un escalar respecto a la adición de vectores	27
2.9	Propiedad distributiva de la multiplicación por un escalar respecto a la adición de escalares	27
2.10	Propiedad asociativa respecto a la multiplicación por un escalar ...	28
2.11	El elemento neutro en la multiplicación de un vector por un escalar	29
2.12	Sustracción de vectores	33
2.13	Aplicaciones de vectores en Física	35

CAPÍTULO 3: DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL EN R^3

3.1	Combinación lineal de dos vectores	48
3.2	Combinaciones lineales trivial y nula	55
3.3	Vectores linealmente dependientes	55
3.4	Vectores linealmente independientes	57
3.5	Dimensión y base del espacio vectorial R^3	59
3.6	Base canónica	60
3.7	Producto escalar de dos vectores	64
3.8	Forma geométrica del producto escalar	65

3.9	Propiedades del producto escalar	67
-----	--	----

CAPÍTULO 4: MATRICES

4.1	Matrices. Definiciones.	70
4.2	Igualdad de matrices	73
4.3	Adición de matrices	74
4.4	Propiedades de la adición de matrices	76
4.5	Multiplicación de un escalar por una matriz	77
4.6	Sustracción de matrices	78
4.7	Multiplicación de matrices	79
4.8	Propiedades de la multiplicación de matrices	82
4.9	Operaciones elementales de filas y columnas en una matriz	89
4.10	Inversa de una matriz cuadrada	90
4.11	Uso de la matriz inversa para resolver sistemas de ecuaciones	97

CAPÍTULO 5: DETERMINANTES

5.1	Determinantes de orden 2	103
5.2	Determinantes de orden 3. Reglas de Sarrus y de Cramer	104
5.3	Determinantes de orden n	111
5.4	Uso de determinantes para determinar la matriz inversa	125
5.5	Propiedades de los determinantes	132
5.6	Determinante de una matriz triangular	136
5.7	Evaluación de un determinante usando sus propiedades	137
5.8	Producto vectorial de dos vectores	144
5.9	Magnitud y dirección del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$	147
5.10	Propiedades del producto vectorial	149

CAPÍTULO 6: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

6.1	Forma general de un sistema de ecuaciones lineales	154
6.2	Sistemas homogéneos y no homogéneos	155
6.3	Sistemas compatibles e incompatibles	156
6.4	Sistemas determinados e indeterminados	157
6.5	Sistemas de ecuaciones equivalentes	157
6.6	Matriz reducida. Rango de una matriz	158
6.7	Solución de sistemas de ecuaciones no homogéneas	162
6.8	Estudio de sistemas de ecuaciones no homogéneos	170
6.9	Estudio de sistemas homogéneos	187

6.10 Balanceo de ecuaciones químicas mediante ecuaciones homogéneas	190
---	-----

CAPÍTULO 7: POLINOMIOS

7.1 Revisión de conceptos básicos sobre polinomios	194
7.2 Adición de polinomios	195
7.3 Multiplicación de polinomios	196
7.4 División de polinomios	197
7.5 Valor numérico y ceros de un polinomio	198
7.6 Divisibilidad de un polinomio por $z - a$. Teorema del residuo	201
7.7 División sintética (Regla de Ruffini)	204
7.8 Divisibilidad de un polinomio por un binomio de la forma $az + b$	208
7.9 Número y naturaleza de las raíces de un polinomio	212
7.10 Determinación de las raíces de un polinomio	223
7.11 Factorización de polinomios	230
7.12 El método de los coeficientes indeterminados	232
7.13 Ecuaciones que se reducen a ecuaciones de segundo grado	237

CAPÍTULO 8: INECUACIONES

8.1 Intervalos en R	240
8.2 Propiedades de las desigualdades	242
8.3 Solución de inecuaciones lineales	244
8.4 Inecuaciones compuestas	246
8.5 Inecuaciones con valor absoluto	249
8.6 Sistemas de ecuaciones de una variable	252
8.7 Inecuaciones racionales	252
8.8 Inecuaciones de segundo grado con una variable	257

CAPÍTULO 9: SECCIONES CÓNICAS

9.1 Distancia entre dos puntos de un plano	267
9.2 Curva en el plano XY	267
9.3 Lugar geométrico	268
9.4 Secciones cónicas	269
9.5 La circunferencia	270
9.6 La elipse	275
9.7 Significado geométrico de a y b	277
9.8 Ecuación de la elipse con eje focal en el eje Y	281
9.9 Ecuación de la elipse con centro fuera del origen	283

9.10 La hipérbola	288
9.11 Significado de a y b. Asíntotas de la hipérbola	289
9.12 Otras ecuaciones de la hipérbola	292
9.13 La parábola	297
9.14 Parábola con vértice en el punto (h, k)	301
9.15 Ecuación general de la parábola	304

CAPÍTULO 10: GEOMETRÍA DEL ESPACIO

10.1 El método axiomático	306
10.2 Ecuación de la recta en el espacio	313
10.3 Ecuación del plano	318
10.4 Forma simétrica de la ecuación de la recta	323

CAPÍTULO 11: ECUACIÓN DEL BINOMIO

11.1 Definición de factoriales	326
11.2 Números combinatorios	327
11.3 El teorema del binomio	330

CAPÍTULO 12: TEORÍA COMBINATORIA

12.1 Principio de conteo	334
12.2 Permutaciones	338
12.3 Variaciones	340
12.4 Combinaciones	345

CAPÍTULO 13: ESTADÍSTICA

13.1 Organización de datos. Histogramas	349
13.2 Medidas de tendencia central	351
13.3 Medidas de dispersión	355

CAPÍTULO 14: PROBABILIDAD

14.1 Concepto de probabilidad	359
14.2 Experimentos y espacio muestral	362
14.3 Teoremas sobre probabilidad	365
14.4 Probabilidad condicional	371
14.5 Eventos independientes	374

Respuestas a los ejercicios	377
-----------------------------------	-----

Bibliografía	390
--------------------	-----

Índice	391
--------------	-----

VECTORES EN EL ESPACIO

1.1 CONCEPTOS PRIMITIVOS: EL PUNTO, LA RECTA, EL PLANO Y EL ESPACIO

En cualquier ciencia algunos términos no están definidos y las ideas que tratan de simbolizarlos deben ser aceptadas con el fin de construir un basamento sólido. En geometría a estos términos no definidos, *el punto*, *la recta* y *el plano*, se les conoce como *conceptos primitivos*. De esos conceptos primitivos se tiene un conocimiento intuitivo como resultado de nuestras observaciones cotidianas.

Al punto, la recta y el plano los representaremos gráficamente como se muestra en la fig. 1.1, donde usamos letras mayúsculas, minúsculas y griegas, respectivamente para denotarlos. Así se habla del punto A , de la recta r y del plano π .

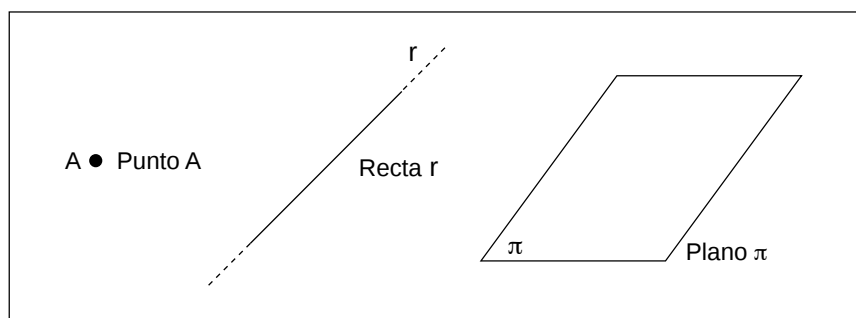


Fig. 1.1 Representación de el punto, la recta y el plano.

1.1.1 El punto: un punto es una idea asociada con una localización en el espacio. Un punto en el espacio es una idealización o abstracción de objetos físicos tales como la punta de un compás y la marca de un lápiz muy afilado en un papel. Un punto no tiene longitud, ni largo ni ancho ni profundidad, es decir, es adimensional. Para darnos cuenta de la dificultad encontrada en la descripción del punto, observamos la fig. 1.2, donde nuestro "punto" original ha sido sometido a distintos grados de amplificación (por ejemplo, a través de lentes). Nuestro "punto", como puedes ver, ya deja de tener el carácter original que se le había asignado. En otras palabras, la represen-

tación original está sujeta a subdivisiones o reducciones sucesivas que nos alejan de la idea "puntual".

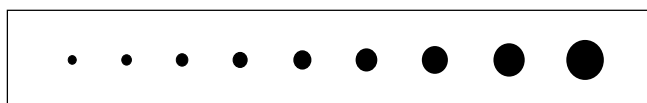


Fig. 1.2 ¿Cuál de ellos es un punto?

La dificultad para definir un punto ha llevado a utilizar expresiones complejas tales como: "un punto es una parte indivisible", "un punto es algo que no tiene magnitud", sujetas también a profundas reflexiones.

1.1.2 La recta: la noción intuitiva de línea surge al observar el borde de una mesa, o al mover un lápiz bien afilado sobre un papel (sin levantarlo). esto se muestra en la fig. 1.3.

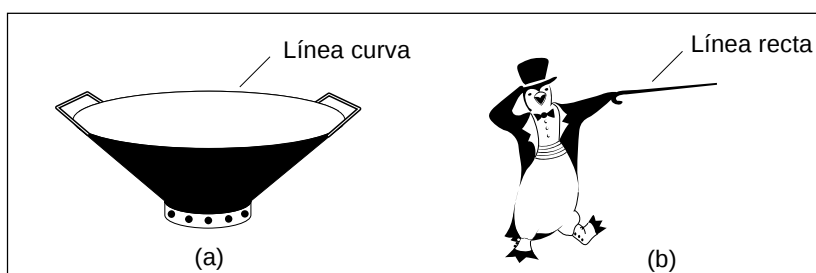


Fig. 1.3 Ideas intuitivas de líneas.

En el primer caso, fig. 1.3(a), se habla de una *línea curva*, mientras que en el segundo caso se habla de una *línea recta* o, simplemente, *recta*.

La recta puede considerarse como un conjunto particular de puntos, infinita en longitud (sin comienzo ni fin) y sin espesor. Presenta, entonces, una sola dimensión. Para apreciar la dificultad de la representación de la recta como un ente sin dimensión, observemos la fig. 1.4, en la cual se presentan versiones amplificadas de la misma línea. La no existencia de dimensión entra visualmente en contradicción con la representación gráfica. El hecho mismo que consideremos a la línea como un conjunto de puntos, objetos sin dimensión, violenta la concepción de la recta como un ente dimensional.

1.1.3 El plano: la idea de *plano* se asocia intuitivamente a objetos tales como un pizarrón, el mar en estado de reposo, el piso de una habitación. En matemática hablaremos del plano como un conjunto de puntos, infinito en extensión, bidimensional y sin espesor.

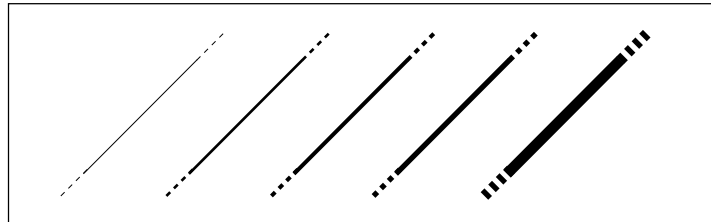


Fig. 1.4 ¿Es la recta un objeto unidimensional?

Al plano lo podemos considerar como un caso especial de superficies curvas (una antena parabólica, una lata de refresco, etc.) que tanto abundan en nuestras observaciones diarias. Consideraremos, además, que sobre un plano pueden estar un número infinito de puntos y rectas.

Como anotamos anteriormente para los casos del punto y la recta, también el plano es una idealización matemática de ciertos objetos encontrados cotidianamente.

1.1.4 El espacio Es el conjunto de todos los puntos. Se considera que el espacio es infinito en extensión, sin comienzo ni fin. El punto, la recta y el plano se consideran incluidos en el espacio. Intuitivamente captamos la idea del espacio cuando observamos un gran tanque de agua u otros astros en una noche clara o figuras geométricas como una pirámide o un cono.

Puntos colineales: pertenecen a una misma recta, fig. 1.5(a).

Puntos coplanarios: que pertenecen a una mismo plano, fig. 1.5(b).

Rectas coplanarias: pertenecen a una mismo plano, fig. 1.5(c).

Rectas paralelas: no tienen ningún punto común, fig. 1.5(d).

Rectas concurrentes: sólo tienen un punto común. Se dice que estas rectas son secantes o que se intersectan en un punto común, fig. 1.5(e).

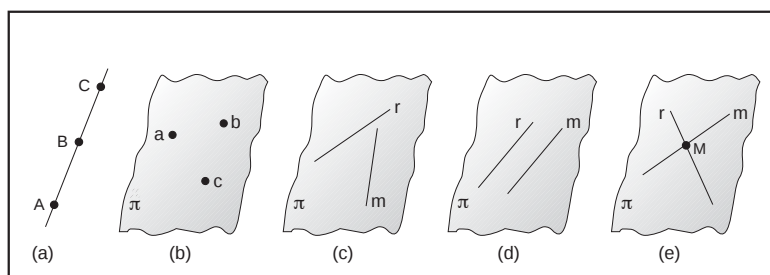


Fig. 1.5 a) Puntos colineales. b) Puntos coplanarios. c) Rectas coplanarias. d) Rectas paralelas. e) Rectas secantes o concurrentes

1.2 EL PLANO R^2 . REPRESENTACIÓN DE PUNTOS EN EL PLANO R^2 .

Ya vimos que un plano está formado por un número infinito de puntos. A fin de ubicar los puntos en un plano hemos también estudiado, en Matemática de 8º grado, la representación de los mismos en un sistema de coordenadas rectangulares, tal como se muestra en la fig. 1.6. Las rectas X y Y forman el plano XY .

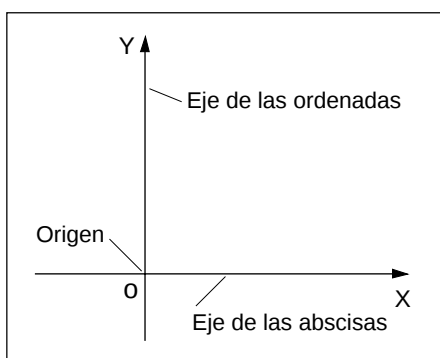


Fig. 1.6 Sistema de coordenadas rectangulares.

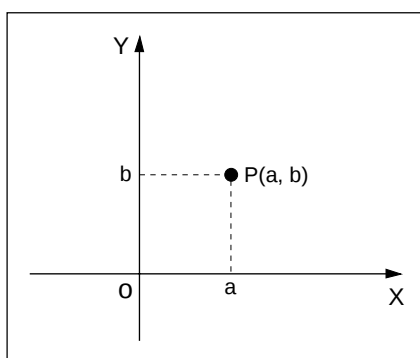


Fig. 1.7 Coordenadas de un punto en un plano.

A cada punto P del plano XY le corresponde un par ordenado (a, b) de números reales que lo ubican en forma precisa en ese plano, tal como puede verse en la fig. 1.7. Al par ordenado (a, b) se le denomina coordenadas del punto P .

Al plano XY , formado por las rectas X y Y , se le conoce como plano R^2 y se define formalmente como el conjunto de pares ordenados (x, y) de números reales, de manera que, a cada punto P del plano le corresponde uno y sólo un par ordenado. De manera simbólica esto se representa como:

$$R^2 = \{(x, y): x \in R, y \in R\} \quad (1.1)$$

que en palabras significa: "el plano R^2 está formado por todos los puntos del plano cuya representación está dada por los pares ordenados (x, y) . Tanto x como y son números reales".

Cuando se habla del par ordenado (x, y) se está afirmando que x mide la ubicación de P sobre el eje X y que y mide la ubicación de P sobre el eje Y .

✱ EJEMPLO 1.1.

Ubica los siguientes puntos en R^2 :

$$P_1(1, 3) \quad P_2(-1, 2) \quad P_3(-2, -3)$$

☆ Solución

En la fig. 1.8 se muestra la ubicación de los puntos dados.

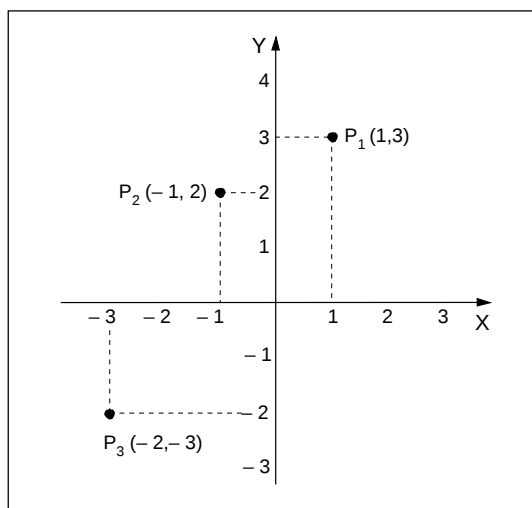


Fig. 1.8 Ubicación de los puntos $(1, 3)$, $(-1, 2)$ y $(-2, -3)$ en R^2 . Ejemplo 1.1.

 1.3 EL ESPACIO R^3 . REPRESENTACIÓN DE PUNTOS EN R^3 .

En la sección 1.1. definimos al espacio como el conjunto de todos los puntos. Pero, ¿cómo ubicamos un punto en el espacio? Considera, por ejemplo, tu salón de clases y tratemos de ubicar un punto cualquiera. Para ello tenemos que establecer un sistema de referencia que podría estar formado por tres planos correspondientes a una pared, el plano del pizarrón y del piso, tal como se muestra en la fig. 1.9.

El punto P queda totalmente ubicado si medimos las distancias a , b y c a los planos del pizarrón, de la pared y del piso, respectivamente. Como

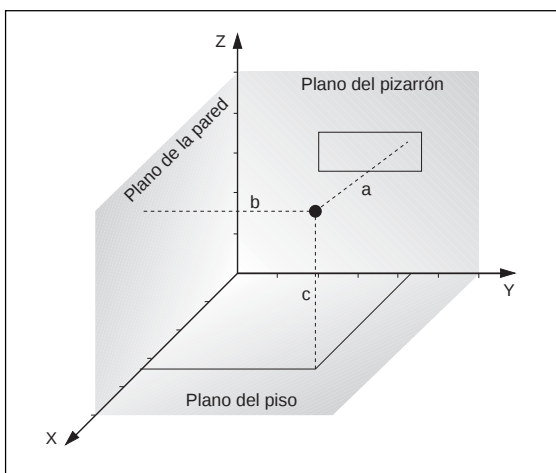


Fig. 1.9 Ubicación de un punto P en un salón de clase.

puedes darte cuenta, en el caso de la representación espacial es necesario imaginar mentalmente la posición de cualquier punto en el espacio. Aunque esto requiere un mayor esfuerzo mental, por la costumbre de

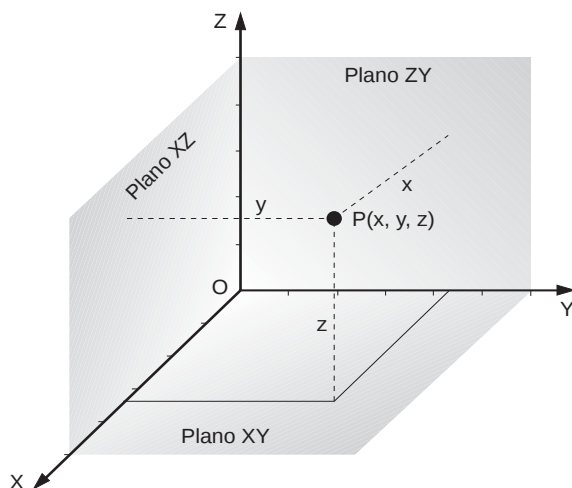


Fig. 1.10 Sistema de coordenadas rectangulares en el espacio.

trabajar sólo en un plano, poco a poco se comienza a desarrollar una visión integral del espacio y la ubicación de cuerpos en el mismo. En parte, lo que complica la representación es el hecho que hay que dibujar en un plano, en un papel, situaciones que envuelven el espacio. De allí que sea importante la práctica constante de la representación espacial.

Ahora bien, así como representamos puntos en el plano mediante pares ordenados (x, y) , también

podemos representar puntos en el espacio mediante ternas ordenadas (x, y, z) . Para ello adoptamos un sistema de coordenadas rectangulares formado por tres rectas mutuamente perpendiculares, como se muestra en la fig. 1.10.

Las tres rectas se intersectan en el punto O que es el origen del sistema de coordenadas. Es usual, pero no indispensable designar a las rectas en el plano del papel como los ejes Z (eje vertical) y Y (eje horizontal). El eje X sale del plano del papel.

Los tres ejes perpendiculares forman los planos ZY , XY y XZ , que son también perpendiculares entre sí. El punto $P(x, y, z)$ tiene coordenadas x, y, z . La coordenada x es la medida de distancia desde el punto hasta el plano ZY , la coordenada y es la medida de la distancia desde el punto al plano XZ y la coordenada z es la medida de la distancia desde el punto al plano XY .

Para ubicar un punto particular $P(a, b, c)$ en el espacio, primero localizamos los números a y b en los ejes X y Y , respectivamente. Por a y b dibujamos rectas perpendiculares l_1 y l_2 a X y Y en el plano XY . Por el punto de intersección P' de estas dos rectas, dibujamos otra recta perpendicular, l_3 , al plano XY . Sobre esta última recta, subimos o bajamos para ubicar a c sobre el eje Z . En la fig. 1.11 se ilustra el

procedimiento. El punto P' es la proyección del punto P sobre el plano XY .

Es importante hacer notar que en la representación espacial hecha en el plano del papel, una recta perpendicular al eje X en el plano YX es paralela al eje Y (recta l_1 en la fig. 1.9). Igualmente, una recta perpendicular al eje Y en el plano XY es paralela al eje X (recta l_2 en la fig. 1.9). Con el fin de dibujar apropiadamente la ubicación de P en el plano, procedemos de la siguiente manera:

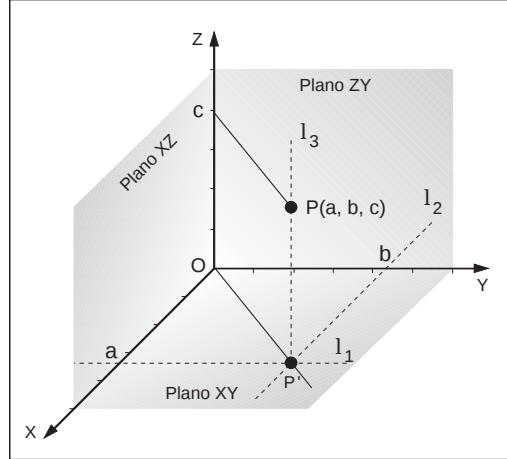


Fig. 1.11 Procedimiento para representar el punto $P(x, y, z)$ en el espacio.

1. Localizamos el punto P' mediante el procedimiento ya descrito.
2. Dibujamos el segmento OP' entre el origen y el punto P' .
3. Localizamos c sobre el eje Z y dibujamos un segmento cP paralelo a OP' que llegue hasta la recta l_3 .

Si se siguen los pasos anteriores, la figura resultante lucirá agradable a la vista y permitirá desarrollar un sentido espacial en el estudiante.

Como hemos visto, a cada punto en el espacio se le asigna una terna ordenada $P(x, y, z)$ que lo determina de forma precisa, ya que x representa una única medida sobre el eje X , y representa una única medida sobre el eje Y y z representa una única medida sobre el eje Z . Más precisamente podemos decir que en un sistema de coordenadas rectangulares:

Cada punto P puede representarse en el espacio mediante una y sólo una terna ordenada y a cada terna ordenada le corresponde uno y sólo un punto en el espacio.

Al espacio XYZ , formado en este caso por las rectas X , Y , y Z se le conoce como **espacio** R^3 y se define formalmente como el conjunto de ternas ordenadas (x, y, z) de números reales, de manera que, a cada punto P del espacio le corresponde una y sólo una terna ordenada. De manera simbólica esto se representa como:

$$R^3 = \{(x, y, z): x \in R, y \in R, z \in R\} \quad (1.2)$$

Representa en el espacio los siguientes puntos:

a) $P(3, 3, 4)$

b) $P(2, -2, 3)$

c) $P(1, 3, -3)$

☆ **Solución**

a) Procedemos de la siguiente manera (ver fig. 1.12):

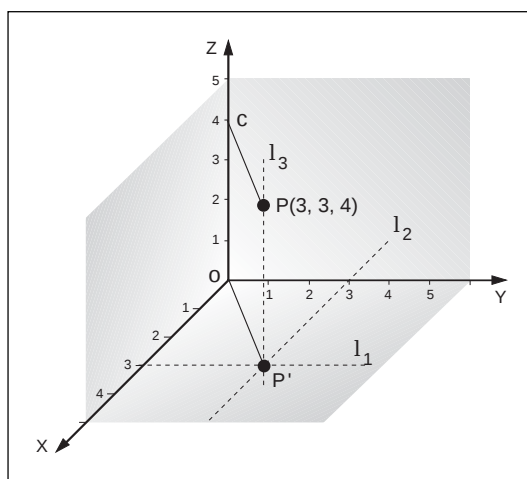


Fig. 1.12 Representación del punto $P(3, 3, 4)$.

1. Medimos 3 unidades sobre el eje X y por allí dibujamos la recta l_1 .
2. Medimos 3 unidades sobre el eje Y y dibujamos la recta l_2 . La intersección de l_2 y l_1 determina la proyección P' de P .
3. Dibujamos el segmento OP' .
4. Medimos 4 unidades sobre el eje Z y dibujamos por allí el segmento cP , paralelo a OP' . De esta forma ubicamos el punto $P(3, 3, 4)$.

b) En la fig. 1.13 se muestra la solución.

c) En la fig. 1.14 muestra la ubicación del punto $P(1, 3, -3)$.

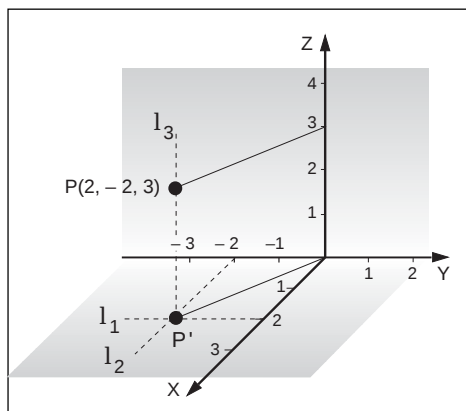


Fig. 1.13 Representación del punto $P(2, -2, 3)$.

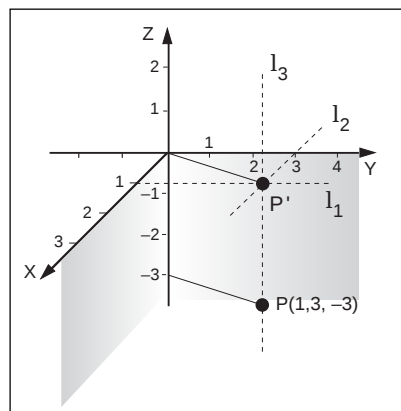
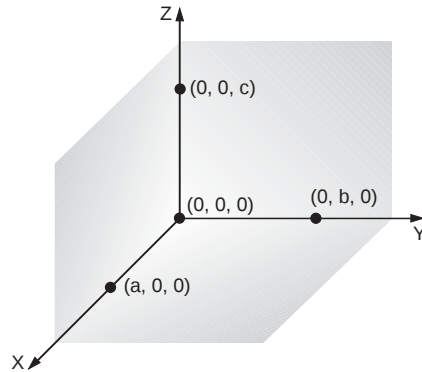
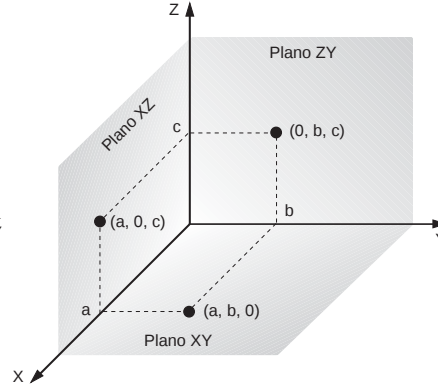


Fig. 1.14 Representación del punto $P(1, 3, -3)$.

1.4 PUNTOS NOTABLES EN R^3

- a. *Puntos en el origen*: el punto O , origen del sistema de coordenadas rectangulares, se representa por $(0, 0, 0)$.
- b. *Puntos situados sobre los ejes cartesianos*: un punto sobre el eje X tiene coordenadas de la forma $(a, 0, 0)$. Un punto situado sobre el eje Y tiene coordenadas de la forma $(0, b, 0)$. Un punto situado sobre el eje Z tiene coordenadas de la forma $(0, 0, c)$. En la fig. 1.15 se muestran estos casos y el anterior.
- c. *Puntos sobre los planos XY , XZ y ZY* : estos puntos pueden representarse por $(a, b, 0)$, $(a, 0, c)$ y $(0, b, c)$, tal como se muestra en la fig. 1.16.


 Fig. 1.15 Puntos situados sobre los ejes coordenados en R^3 .

 Fig. 1.16 Puntos situados sobre los planos YX , XZ y ZX en R^3 .

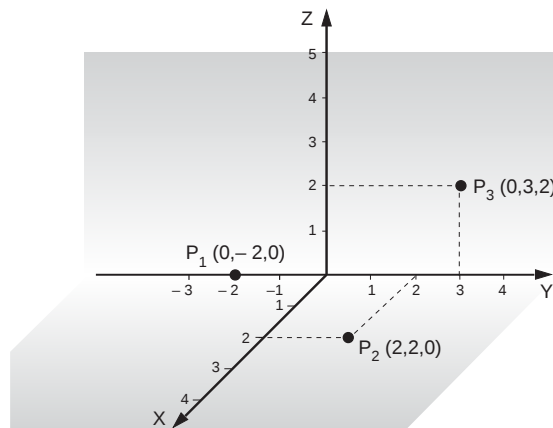
✧ EJEMPLO 1.3

Representa los siguientes puntos en R^3 :

- a) $P_1(0, -2, 0)$
- b) $P_2(2, 2, 0)$
- c) $P_3(0, 3, 2)$

☆ Solución

En la fig. 1.17 se muestra la representación de P_1 , P_2 y P_3 .


 Fig. 1.17 Representación de $P_1(0, -2, 0)$, $P_2(2, 2, 0)$ y $P_3(0, 3, 2)$ en R^3 . Ejemplo 1.3.

*** Ejercicios**

1.1 ¿Pueden los puntos y las líneas ser vistas? Explica y discute con tus compañeros de clase.

1.2 De acuerdo con tu experiencia cotidiana, da ejemplos de puntos, rectas y planos. Ubícalos en el espacio y trata de dibujarlos en un papel.

1.3 Critica las siguientes afirmaciones:

- a) Un punto es algo indivisible.
- b) Una línea no tiene principio ni fin.
- c) El espacio es ilimitado.
- d) Un punto es algo que no tiene magnitud.
- e) Un campo de fútbol es el espacio.
- f) La superficie marina en reposo es un plano.

1.4 Dados los puntos A, B, C, D y E no colineales, situados en un plano, ¿cuántas rectas pueden dibujarse a través de los mismos?

1.5 Dados los puntos A, B, C, D y E no colineales, situados en un plano, ¿cuántas rectas pueden dibujarse a través de los mismos, tomados en pares?

1.6 Dados los puntos M, N, P y Q no colineales, considerados en el espacio, **a)** ¿cuántas rectas pueden dibujarse a través de los mismos tomados en pares?, **b)** ¿cuántos planos pueden dibujarse por cada tres puntos?

1.7 ¿Cuántos planos pueden dibujarse que contengan a una misma recta r ?

1.8 ¿Pueden tres puntos ser coplanarios y no colineales?

1.9 ¿Pueden tres puntos ser colineales y no coplanarios?

1.10 Ubica los siguientes puntos en R^2 :

- a) $P_1(0, 3)$ b) $P_2(-2, 3)$ c) $P_3(-3, -2)$ d) $P_4(2, 4)$

1.11 Representa los siguientes puntos en R^3 :

- a) $(2, 1, 3)$ b) $(2, -3, -2)$ c) $(2, -4, 3)$
d) $(-1, 3, 3)$ e) $(-2, 3, 4)$ f) $(-2, -3, -2)$
g) $(3, 4, -2)$ h) $(-2, 3, -3)$ i) $(3, 3, -3)$

1.12 Representa los siguientes puntos en R^3 :

- | | | |
|---------------------|----------------------|-----------------------|
| a) (3, 3, 0) | b) (0, 0, 3) | c) (-2, 2, 0) |
| d) (3, 0, 4) | e) (0, -3, 2) | f) (-2, -2, 0) |

1.5 VECTORES EN EL PLANO

En cursos anteriores hemos estudiado vectores en el plano y descrito sus características y las operaciones válidas que pueden hacerse con los mismos. A continuación revisaremos esos conceptos.

El concepto de vector, así como muchos otros conceptos matemáticos tienen su origen en la Física. Por ejemplo, los conceptos de fuerza y velocidad, cantidades que deben describirse en términos de una magnitud y una dirección, son fácilmente asimilables a la idea de vectores.

Podemos decir que un vector es una abstracción matemática representativa de un fenómeno físico. Para representar un vector en el plano, basta con tomar un punto de origen O y dibujar un segmento dirigido desde ese punto a otro cualquiera P del plano. De esa forma obtenemos el vector $\vec{OP}$ que va desde O hasta P , como se muestra en la fig. 1.18.

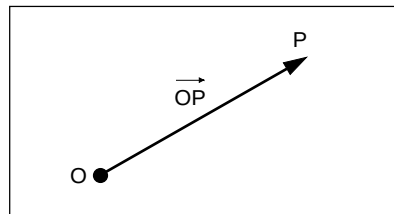


Fig. 1.18 Representación del vector $\vec{OP}$ en un plano.

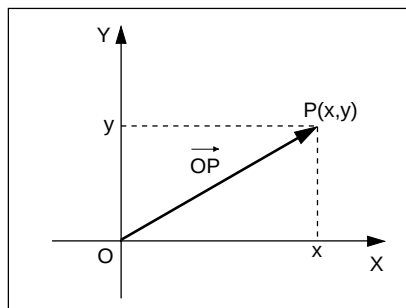


Fig. 1.19 Representación del vector $\vec{OP}$ en un sistema de coordenadas rectangulares.

Un vector puede definirse sin tener como referencia ningún sistema de coordenadas. De hecho, cantidades como la fuerza o la velocidad pueden representarse sin hacer uso de un sistema de coordenadas. La imaginación del hombre, sin embargo, ha introducido tales sistemas de referencia para facilitar las operaciones matemáticas. Así, el vector $\vec{OP}$ de la fig. 1.18 puede representarse en el plano usando coordenadas rectangulares, tal como se muestra en la fig. 1.19. El origen del vector se ha hecho coincidir con el origen del sistema de coordenadas cartesianas. Al punto P se le asignan las

coordenadas (x, y) . Al vector $\vec{OP}$ se le representa de la siguiente forma:

$$\vec{OP} = \langle x, y \rangle$$

A las letras x y y se les denomina componentes del vector $\vec{OP}$. En general, un vector cuyo origen y extremo tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) respectivamente, puede expresarse como (ver fig. 1.20):

$$\vec{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle \quad (1.3)$$

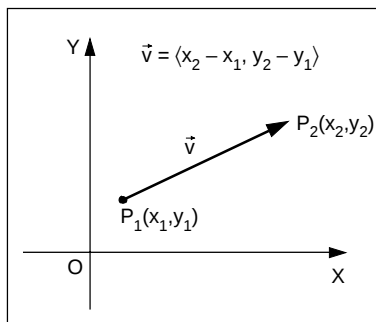


Fig. 1.20 Las componentes de un vector son las diferencias entre las abscisas y las ordenadas.

La longitud de un vector $\vec{v}$, expresada como $|\vec{v}|$, o simplemente v , es su magnitud, mientras que la dirección del vector se indica por el ángulo que forma con alguna recta fija en el plano, o una paralela a ella, usualmente con el eje X , o una paralela al mismo, en un sistema de coordenadas cartesianas.

La representación de un vector mediante sus componentes, dada por la relación (1.3) no es la única forma de representación. En cursos anteriores (ver Matemática 1º Año Diversificado, Júpiter Figuera) vimos que es posible representar a un vector mediante su magnitud y ángulo. Esta representación corresponde a la forma polar de un vector, que se expresa mediante la relación:

$$\vec{v} = \langle v, \alpha \rangle \quad (1.4)$$

donde v es la magnitud del vector y α es el ángulo que determina la dirección. Las componentes en (1.3) y (1.4) están relacionadas mediante las fórmulas:

$$v = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (1.5)$$

Las componentes, según los ejes X y Y de v son:

$$v_x = v \cos \alpha$$

$$v_y = v \sin \alpha \quad (1.6)$$

✱ EJEMPLO 1.4

Representa en el plano los vectores cuyos extremos y orígenes son los siguientes:

a) Origen: $P(1, 1)$ Extremo: $P(3, 4)$

b) Origen: $P(0, -2)$ Extremo: $P(-3, 3)$

Determina, además, el módulo y la dirección de cada vector.

☆ Solución

a) Si llamamos $\vec{v}$ al vector, podemos expresarlo en términos de sus componentes como:

$$\vec{v} = \langle 3 - 1, 4 - 1 \rangle \Rightarrow \vec{v} = \langle 2, 3 \rangle$$

El módulo y ángulo del vector son:

$$v = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \quad v \approx 3,61$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{3}{2} \quad \alpha \approx 56,31^\circ$$

$\vec{v}$ puede entonces expresarse como: $\vec{v} = \langle 3,61; 56,31^\circ \rangle$

b) Llamando $\vec{u}$ al vector, tenemos:

$$\vec{u} = \langle -3 - 0, 3 + 2 \rangle \Rightarrow \vec{u} = \langle -3, 5 \rangle$$

El módulo y ángulo de $\vec{u}$ son:

$$u = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$u \approx 5,83$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{5}{-3} \Rightarrow \alpha \approx 121^\circ$$

En la fig. 1.21 se muestran los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

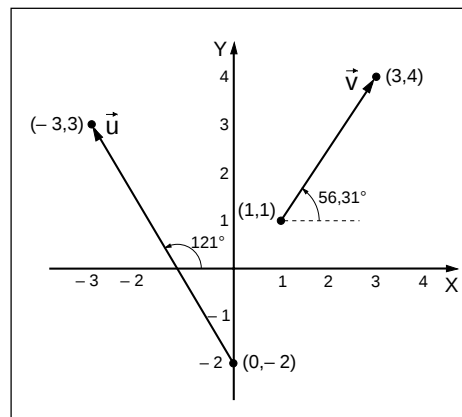


Fig. 1.21 Representación de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ del ejemplo 1.4.

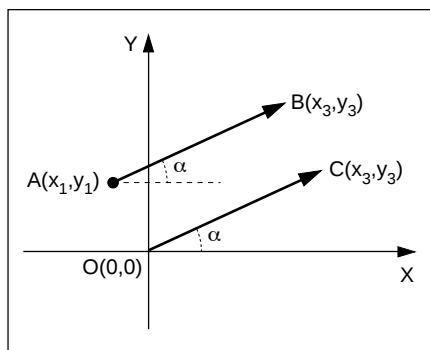


Fig. 1.22 Los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OC}$ son equipolentes.

Se dice que dos vectores son *iguales* o *equipolentes* si tienen la misma magnitud y dirección. Así, los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{OC}$ de la fig. 1.22 son equipolentes. Observa que dichos vectores tienen distintos puntos terminales y sin embargo, las longitudes de los segmentos que los representan y el ángulo α que forman con el eje X son los mismos. Los vectores equipolentes tienen iguales sus componentes.

De la definición anterior de vectores equipolentes, podrás notar que existe un número infinito de vectores equipolentes. Al conjunto formado por todos los vectores equipolentes a un vector dado se le denomina *vector libre*. Cualquier vector del conjunto vector libre es un representante del mismo y puede ser usado en las operaciones con vectores.

La definición anterior nos permite trasladar cualquier vector de manera que su origen coincida con el origen del sistema de coordenadas rectangulares, tal como se indica en la fig. 1.22. A este vector se le conoce con el nombre de *vector de posición* o *representante canónico* del conjunto de vectores equipolentes.

1.6 VECTORES EN EL ESPACIO R^3

Cuando se considera un vector en el espacio, es necesario especificar su origen y su extremo mediante puntos de la forma $P(x, y, z)$. En la fig. 1.23 se representa un vector $\vec{v}$ en un sistema de coordenadas rectangulares.

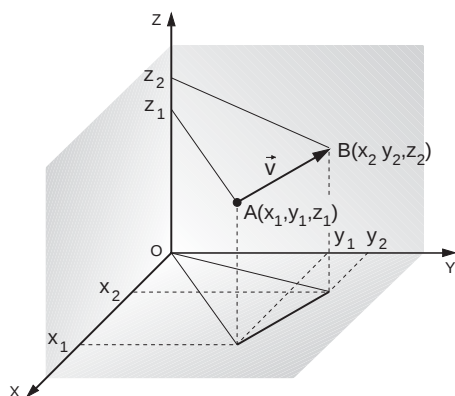


Fig. 1.23 Representación de un vector en el espacio.

La representación de un vector $\vec{v}$ en R^3 mediante sus componentes es:

$$\vec{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle \quad (1.7)$$

Las definiciones de vectores equipolentes y vector libre que hemos dado para vectores en el plano, aplican también en el espacio. De acuerdo a esto, dos vectores en el espacio $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son equipolentes si tienen las mismas componentes. El vector que

representa a todos los vectores equipolentes se le denomina *vector libre*.

Al conjunto de todos los vectores libres en R^3 los denotaremos por V_3 y escribimos:

$$V_3 = \{\text{todos los vectores libres en } R^3\} \quad (1.8)$$

Los conceptos de vector equipolente y vector libre facilitan la representación espacial de un vector cualquiera $\vec{v}(a, b, c)$. Para ello, se ubica el punto P que representa las componentes de dicho vector en un sistema de coordenadas rectangulares en el espacio y se dibuja el vector $\vec{v}$ entre el origen y el punto P . A este vector se le conoce como vector posición o representante canónico de los vectores equipolente de $\vec{v}$.

En la fig. 1.24 se muestra el representante canónico del vector libre $\vec{v}(2, 3, 3)$.

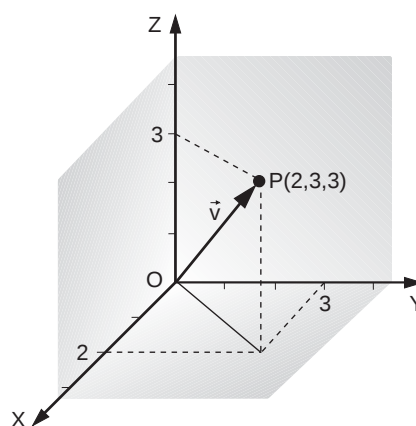


Fig. 1.24 Representante canónico del vector libre $(2, 3, 3)$.

✧ EJEMPLO 1.5

Representa los siguientes vectores en R^3 cuyos orígenes y extremos se dan. Expresa los vectores en términos de sus componentes.

a) Origen: $A(3, -2, 1)$ Extremo: $B(-2, 1, 2)$.

b) Origen: $A(-2, -2, 1)$ Extremo: $B(1, 2, 0)$.

☆ Solución

a) La fig. 1.25 muestra el resultado. El vector $\vec{AB}$ puede expresarse como:

$$\vec{AB} = \langle -5, 3, 1 \rangle$$

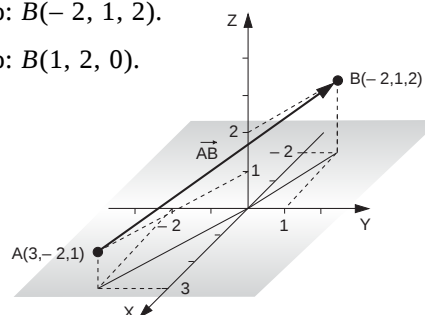
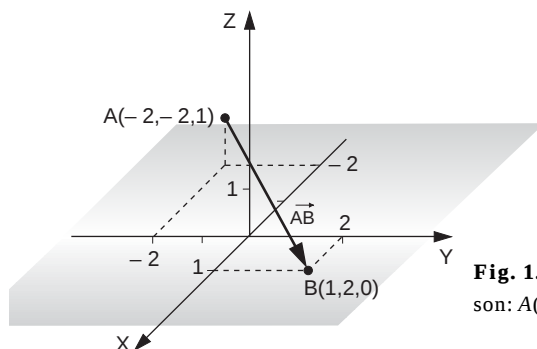


Fig. 1.25 Vector $\vec{AB}$ cuyo origen y extremo son: $A(3, -2, 1)$ y $B(-2, 1, 2)$. Ejemplo 1.5(a).



b) En la fig. 1.26 se muestra el vector $\vec{AB}$, que puede expresarse como:

$$\vec{AB} = \langle 3, 4, 1 \rangle$$

Fig. 1.26 Vector $\vec{AB}$ cuyo origen y extremo son: $A(-2, -2, 1)$ y $B(1, 2, 0)$. Ejemplo 1.5(b).

✱ EJEMPLO 1.6

Dado el vector de origen $A(2, -2, 0)$ y extremo $B(0, 1, 2)$, exprésalo en término de sus componentes y dibuja el vector de posición correspondiente.

☆ Solución

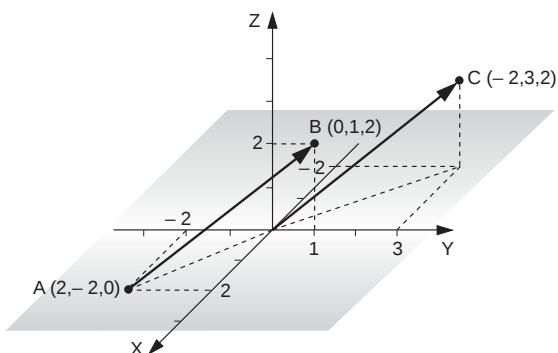


Fig. 1.27 Vector $\vec{AB}$ y vector de posición $\vec{OP}$ para el ejemplo 1.6.

El vector $\vec{AB}$ está dado por:

$$\vec{AB} = \langle -2, 3, 2 \rangle$$

Para representar el vector de posición $\vec{OP}$, localizamos el punto $P(-2, 3, 2)$ y dibujamos el vector entre los puntos O y P . En la fig. 1.27 se muestran tanto el vector $\vec{AB}$ como el vector de posición $\vec{OP}$.

De acuerdo a lo ya tratado, a cada punto P de R^3 le corresponde un representante canónico de cualquier vector libre. A esta correspondencia se le llama *biyección entre el conjunto R^3 y el conjunto de todos los vectores libres V_3* .

1.7 MAGNITUD Y DIRECCIÓN DE UN VECTOR EN R^3

Consideremos el vector de posición $\vec{OP}$ mostrado en la fig. 1.28. La *magnitud* o *norma* del vector es la longitud del segmento OP . Para determinar este valor, debemos observar que al proyectar el segmento OP en el plano XY , obtenemos el segmento OP' , que el segmento XP' forma

un ángulo de 90° con el eje X y que el segmento PP' forma un ángulo de 90° con el segmento OP' . Es decir, los triángulos ΔOXP y $\Delta OP'P$ son triángulos rectángulos. En el triángulo $\Delta OPP'$ se cumple (Teorema de Pitágoras):

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OP'})^2 + (\overline{PP'})^2$$

donde $\overline{OP}$, $\overline{OP'}$ y $\overline{PP'}$ son las longitudes de los segmentos OP , OP' y PP' , respectivamente.

Como $\overline{PP'} = z$:

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OP'})^2 + z^2 \quad (1.9)$$

En el triángulo $\Delta OXP'$ tenemos (Teorema de Pitágoras):

$$(\overline{OP'})^2 = (\overline{Ox})^2 + (\overline{xP'})^2$$

Como $\overline{Ox} = x$ y $\overline{xP'} = y$

$$(\overline{OP'})^2 = x^2 + y^2$$

Sustituyendo en (1.8):

$$(\overline{OP})^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.10)$$

Finalmente, la magnitud o norma del vector $\vec{OP}$ puede expresarse como:

$$|\vec{OP}| = OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.11)$$

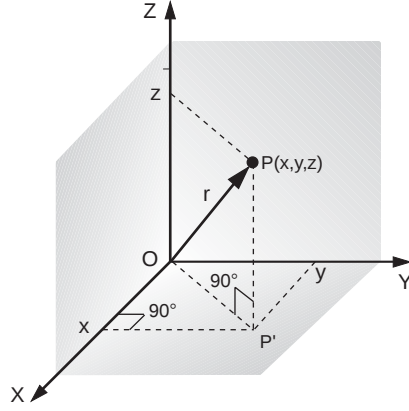


Fig. 1.28 Esquema para determinar la magnitud de un vector en R^3 .

Cuando estudiamos vectores en el plano, vimos que la dirección de un vector podía determinarse si se conocía el ángulo que formaba con el eje X . La determinación de la dirección de un vector en el espacio es algo más complicada y envuelve el conocimiento que el vector forma con los tres ejes coordenados, X , Y y Z .

Consideremos la fig. 1.29 que muestra nuevamente al vector de posición $\vec{OP}$ que va desde $(0, 0, 0)$ a (x, y, z) y cuya magnitud, por facilidad, la llamaremos r .

El vector $\vec{OP}$ forma los ángulos α , β y γ con los ejes X , Y y Z , respectivamente. Los ángulos $\angle Oxp$, $\angle Oyp$ y $\angle Ozp$ son ángulos rectos (discute esto con tu profesor) y, por tanto, los triángulos ΔOxp , ΔOyp y ΔOzp son triángulos rectángulos y podemos escribir:

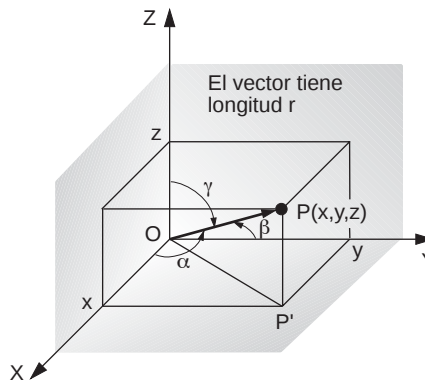


Fig. 1.29 Esquema para la determinación de la dirección de un vector en R^3 .

$$\cos \alpha = \frac{x}{OP}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{OP}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{OP} \quad (1.12)$$

A las cantidades $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ se les llama *cosenos directores del vector* $\vec{OP}$.

Como $r = |\vec{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se tiene:

$$\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Elevando al cuadrado las relaciones anteriores y sumándoles:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

De donde se deduce:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (1.13)$$

✱ EJEMPLO 1.7

Para los vectores dados, determina su magnitud y dirección:

- a)** $\vec{v} = \langle 3, 2, 4 \rangle$ **b)** vector de origen $P_1(2, 4, 3)$ y extremo $P_2(4, 2, 7)$.

Dibuja ambos vectores.

☆ Solución

a) $\vec{v} = \langle 3, 2, 4 \rangle$ En la fig. 1.30 se muestra el vector. Su magnitud es:

$$v = \sqrt{3^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{29} \approx 5,39$$

Los cosenos directores son:

$$\cos \alpha = \frac{x}{v} = \frac{3}{5,39} = 0,56$$

$$\cos \beta = \frac{y}{v} = \frac{-2}{5,39} = -0,37$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{v} = \frac{4}{5,39} = 0,74$$

Observa que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Los ángulos α , β y γ son:

$$\alpha = \cos^{-1}(0,56) = 55,94^\circ \quad \beta = \cos^{-1}(-0,37) = 111,78^\circ \quad \gamma = \cos^{-1}(0,74) = 42,27^\circ$$

Es decir, el vector $\vec{v}$ forma ángulos de $55,94^\circ$, $111,78^\circ$ y $42,27^\circ$ con los ejes X , Y y Z , respectivamente.

b) El vector, que llamaremos $\vec{u}$, puede expresarse como:

$$\vec{u} = \langle (4-2), (2-4), (7-3) \rangle$$

$$\vec{u} = \langle 2, -2, 4 \rangle$$

En la fig. 1.31 se muestra el vector $\vec{u}$, cuya magnitud es:

$$u = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{24} \approx 4,90$$

Los cosenos directores y los ángulos son:

$$\cos \alpha = \frac{x}{u} = \frac{2}{4,90} = 0,41.$$

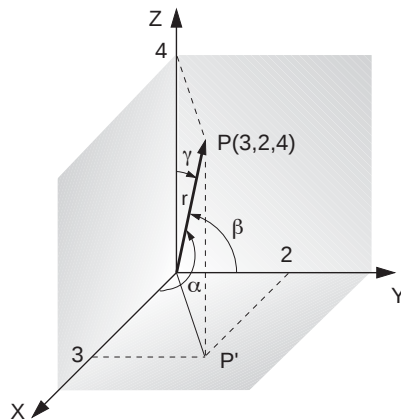


Fig. 1.30 Vector $\vec{v} = \langle 3, -2, 4 \rangle$ para el ejemplo 1.7(a).

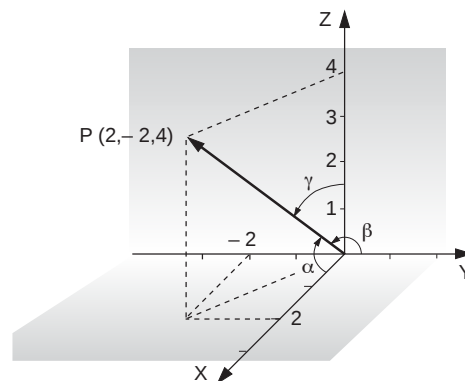


Fig. 1.31 Vector $\vec{u} = \langle 2, -2, 4 \rangle$ para el ejemplo 1.7(b).

$$\cos \beta = \frac{y}{u} = \frac{-2}{4,90} = -0,41$$

$$\cos \gamma = \frac{z}{u} = \frac{4}{4,90} = 0,82$$

✱ Ejercicios

1.13 Representa en el plano XY los siguientes vectores cuyos extremos y orígenes se dan:

a) Vector $\vec{ab}$: Origen $a(0, 0)$ Extremo $b(3, 4)$

b) Vector $\vec{mn}$: Origen $m(-2, 3)$ Extremo $n(1, 1)$

c) Vector $\vec{u}$: Origen $P_1(-2, -2)$ Extremo $P_2(2, 3)$

d) Vector $\vec{v}$: Origen $P_1(2, 0)$ Extremo $P_2(0, 4)$

Expresa los vectores mediante sus componentes y determina, además, el módulo y la dirección de cada uno de ellos.

1.14 Dibuja los vectores de posición correspondientes a los siguientes vectores y determina su módulo y dirección:

a) $\vec{u} = \langle 3, 4 \rangle$

b) $\vec{v} = \langle -2, 4 \rangle$

c) $\vec{w} = \langle 0, 4 \rangle$

1.15 Expresa los siguientes vectores en términos de sus componentes y represéntalos en R^3 :

a) Vector $\vec{AB}$: Origen, $A(0, 0, 0)$ Extremo, $B(2, 3, 4)$

b) Vector $\vec{MN}$: Origen, $M(2, -1, 3)$ Extremo, $N(1, 2, 0)$

c) Vector $\vec{PQ}$: Origen, $P(-2, 2, 0)$ Extremo, $Q(0, 0, 3)$

d) Vector $\vec{RS}$: Origen, $R(-1, 2, 3)$ Extremo, $S(2, -1, 1)$

1.16 Dibuja el vector posición de los vectores cuyos orígenes y extremos se dan:

a) Vector $\vec{u}$: Origen $P_1(3, -1, 3)$ Extremo $P_2(6, 2, 5)$

b) Vector $\vec{v}$: Origen $P_1(0, 2, -3)$ Extremo $P_2(2, 2, 1)$

c) Vector $\vec{w}$: Origen $P_1(2, 4, 2)$ Extremo $P_2(4, 2, 5)$

d) Vector $\vec{AB}$: Origen $P_1(3, 5, 3)$ Extremo $P_2(1, 3, 6)$

1.17 Representa en R^3 los siguientes vectores de posición:

a) $\vec{A} = \langle 0, 2, 3 \rangle$

b) $\vec{B} = \langle 3, 0, 4 \rangle$

c) $\vec{M} = \langle 3, 2, 0 \rangle$

d) $\vec{N} = \langle 3, 3, 4 \rangle$

e) $\vec{P} = \langle 2, -2, 3 \rangle$

f) $\vec{Q} = \langle -2, -2, 3 \rangle$

g) $\vec{R} = \langle -2, 3, 4 \rangle$

h) $\vec{S} = \langle 3, 3, -3 \rangle$

i) $\vec{U} = \langle 3, -2, -2 \rangle$

1.18 Determina la magnitud y dirección de los vectores dados.

a) $\vec{u} = \langle 3, 2, 1 \rangle$

b) $\vec{v} = \langle -2, -3, -1 \rangle$

c) $\vec{v} = \langle 4, 3, 0 \rangle$

d) $\vec{MN} = \langle 3, 0, 4 \rangle$

e) $\vec{MN} = \langle 2, 3, -3 \rangle$

f) $\vec{PQ} = \langle 2, -2, 4 \rangle$

1.19 Si el vector $\vec{AB} = \langle 2, 4, -1 \rangle$ y $A(0, -1, -2)$, determina las coordenadas del punto B .

ÁLGEBRA VECTORIAL

Cuando estudiamos vectores en el plano, en cursos anteriores, definimos vectores equipolentes, opuestos, paralelos, perpendiculares y unitarios $(\vec{i}, \vec{j})$. Definimos además las operaciones de adición y sustracción de vectores, la multiplicación de vectores por números racionales, el producto escalar de dos vectores y estudiamos las propiedades de estas operaciones. En este capítulo extenderemos esas definiciones a vectores en R^3 .

2.1 ADICIÓN DE VECTORES

Dados los vectores $\vec{A} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ y $\vec{B} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ se define el vector suma $\vec{A} + \vec{B}$ como:

$$\vec{A} + \vec{B} = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \rangle \quad (2.1)$$

Lo que establece que para sumar vectores en R^3 se deben sumar sus componentes respectivas según los ejes X, Y y Z.

✱ EJEMPLO 2.1

Dados los vectores:

$$\vec{A} = \langle -2, 0, 3 \rangle \quad \vec{B} = \langle 1, 5, -2 \rangle \quad \vec{C} = \langle 2, -1, 3 \rangle$$

Determina $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} + \vec{C}$ y $\vec{B} + \vec{C}$:

☆ Solución

$$\vec{A} + \vec{B} = \langle -2 + 1, 0 + 5, 3 - 2 \rangle = \langle -1, 5, 1 \rangle$$

$$\vec{A} + \vec{C} = \langle -2 + 2, 0 - 1, 3 + 3 \rangle = \langle 0, -1, 6 \rangle$$

$$\vec{B} + \vec{C} = \langle 1 + 2, 5 - 1, -2 + 3 \rangle = \langle 3, 4, 1 \rangle$$

✱ EJEMPLO 2.2

Determina un vector $\vec{B} = \langle x, y, z \rangle$, tal que si $\vec{A} + \vec{B} = \vec{M}$, $\vec{A} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ y $\vec{M} = \langle -2, 5, 0 \rangle$.

☆ Solución

De acuerdo a la definición:

$$\langle 1, 2, 3 \rangle + \langle x, y, z \rangle = \langle -2, 5, 0 \rangle \Rightarrow \langle 1+x, 2+y, 3+z \rangle = \langle -2, 5, 0 \rangle$$

Luego:

$$\begin{aligned} 1+x &= -2 &\Rightarrow x &= -3 \\ 2+y &= 5 &\Rightarrow y &= 3 \\ 3+z &= 0 &\Rightarrow z &= -3 \end{aligned} \Rightarrow \vec{B} = \langle -3, 3, -3 \rangle$$

2.2 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DEL VECTOR SUMA

Observa los vectores $\vec{A} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ y $\vec{B} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ de la fig. 2.1. El vector suma $\vec{A} + \vec{B}$ se obtiene sumando las longitudes de las componentes en X ($x_1 + x_2$), en Y ($y_1 + y_2$) y Z ($z_1 + z_2$). Por el punto que representa a $x_1 + x_2$ se dibuja una paralela al eje Y y por el punto correspondiente a $y_1 + y_2$, se dibuja una paralela al eje X . Por el punto de intersección de estas dos paralelas (P) se levanta un segmento vertical de longitud $z_1 + z_2$. El extremo de este segmento corresponde al extremo del vector cuyo origen es $(0, 0, 0)$.

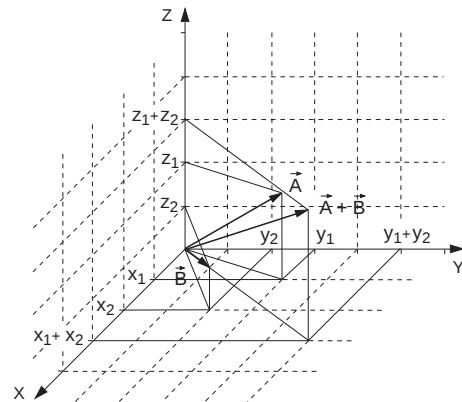


Fig. 2.1 Representación geométrica de la suma de dos vectores.

2.3 PROPIEDAD CONMUTATIVA DE LA ADICIÓN DE VECTORES

Dados los vectores $\vec{u} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$, se verifica:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} \quad (2.2)$$

Para demostrar la relación anterior, observamos que:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \rangle \\ \vec{v} + \vec{u} &= \langle x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1 \rangle \end{aligned}$$

Pero:

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \quad y_1 + y_2 = y_2 + y_1 \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

ya que las componentes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$, por ser números reales, obedecen también a la propiedad conmutativa.

2.4 PROPIEDAD ASOCIATIVA DE LA ADICIÓN DE VECTORES

Dados los vectores $\vec{u} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$, $\vec{v} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ y $\vec{w} = \langle x_3, y_3, z_3 \rangle$, la propiedad asociativa establece:

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} \quad (2.3)$$

A fin de demostrar (1.14) vemos que:

$$\begin{aligned} \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= \langle x_1, y_1, z_1 \rangle + \left(\langle x_2, y_2, z_2 \rangle + \langle x_3, y_3, z_3 \rangle \right) \\ &= \langle x_1, y_1, z_1 \rangle + \langle (x_2 + x_3), (y_2 + y_3), (z_2 + z_3) \rangle \\ &= \langle x_1 + (x_2 + x_3), y_1 + (y_2 + y_3), z_1 + (z_2 + z_3) \rangle \end{aligned}$$

Como $x_1, (x_2 + x_3), y_1, (y_2 + y_3)$ y $z_1, (z_2 + z_3)$ son números reales, podemos usar la propiedad asociativa de números reales a la expresión anterior que nos queda así:

$$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \langle (x_1 + x_2) + x_3, (y_1 + y_2) + y_3, (z_1 + z_2) + z_3 \rangle$$

Pero, el segundo miembro de la relación anterior es igual a $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$, lo cual demuestra la propiedad asociativa.

2.5 ELEMENTO NEUTRO EN LA ADICIÓN DE VECTORES

Al vector $\vec{O} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ se le conoce como *vector nulo* o *elemento neutro en la adición de vectores*. Cuando a un vector cualquiera $\vec{u} = \langle x, y, z \rangle$ se le suma el elemento neutro, el resultado es el mismo vector:

$$\vec{u} + \vec{O} = \vec{u} \quad (2.4)$$

En efecto:

$$\vec{u} + \vec{O} = \langle x, y, z \rangle + \langle 0, 0, 0 \rangle = \langle x + 0, y + 0, z + 0 \rangle$$

Como $x + 0 = x$, $y + 0 = y$, $z + 0 = z$:

$$\vec{u} + \vec{O} = \langle x, y, z \rangle = \vec{u}$$

2.6 ELEMENTO SIMÉTRICO EN LA ADICIÓN DE VECTORES

Dado un vector, se llama *vector simétrico* u *opuesto* a $\vec{u}$ a un vector $\vec{u}'$ de componente $\langle -x, -y, -z \rangle$ que cumple con la siguiente propiedad:

$$\vec{u} + \vec{u}' = \vec{O} \quad (2.5)$$

Para demostrar la relación anterior, efectuamos la suma de $\vec{u}$ y $\vec{u}'$:

$$\langle x, y, z \rangle + \langle -x, -y, -z \rangle = \langle x - x, y - y, z - z \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle = \vec{O}$$

Gráficamente un vector y su opuesto se visualizan como se muestra en la fig. 2.2. El vector $\vec{u}$ se expresa como:

$$\vec{u} = \langle 1, 3, 2 \rangle$$

Mientras que $\vec{u}'$ está dada por:

$$\vec{u}' = \langle -1, -3, -2 \rangle$$

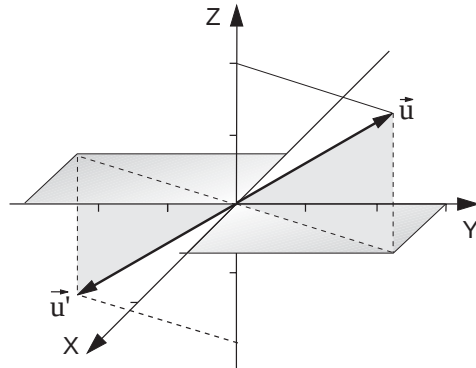


Fig. 2.2 Los vectores $\vec{u} = \langle 1, 3, 2 \rangle$ y $\vec{u}' = \langle -1, -3, -2 \rangle$ son vectores opuestos.

2.7 MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN NÚMERO REAL

Dado un número real α y un vector $\vec{u} = \langle x, y, z \rangle$, el producto $\alpha \vec{u}$ es el vector que resulta al multiplicar α por cada uno de los elementos de $\vec{u}$. Es decir:

$$\alpha \vec{u} = \alpha \langle x, y, z \rangle = \langle \alpha x, \alpha y, \alpha z \rangle \quad (2.6)$$

El vector $\alpha \vec{u}$ tiene el mismo sentido de $\vec{u}$ si $\alpha > 0$ y tiene sentido contrario a $\vec{u}$ si $\alpha < 0$. Así, por ejemplo, si $\vec{u} = \langle 2, 3, 4 \rangle$ y $\alpha = 2$:

$$\alpha \vec{u} = 2 \langle 2, 3, 4 \rangle = \langle 4, 6, 8 \rangle$$

Si $\alpha = -2$:

$$\alpha \vec{u} = -2 \langle 2, 3, 4 \rangle = \langle -4, -6, -8 \rangle$$

En la fig. 2.3 se muestra el vector $\vec{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ y el vector $-2\vec{u} = \langle -2, -2, -2 \rangle$. Como puedes ver, $-2\vec{u}$ tiene sentido contrario a $\vec{u}$.

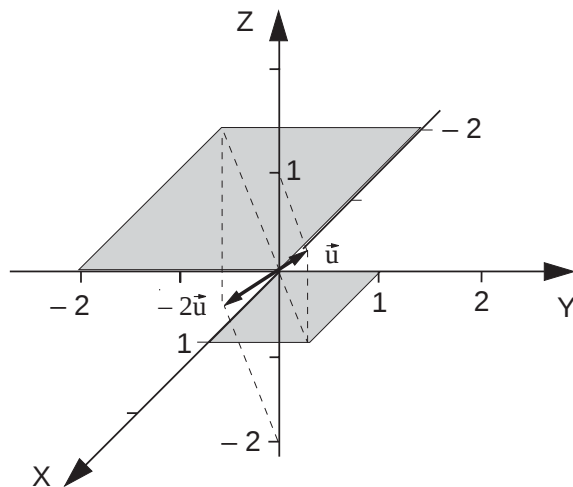


Fig. 2.3 Representación gráfica de los vectores $\vec{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ y $-2\vec{u} = \langle -2, -2, -2 \rangle$.

2.8 PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR RESPECTO A LA ADICIÓN DE VECTORES

Dado el número real α y los vectores $\vec{u} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$, se cumple:

$$\alpha (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} \quad (2.7)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \alpha (\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha (\langle x_1, y_1, z_1 \rangle + \langle x_2, y_2, z_2 \rangle) = \alpha (\langle x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 \rangle) \\ &= \langle \alpha (x_1 + x_2), \alpha (y_1 + y_2), \alpha (z_1 + z_2) \rangle \\ &= \langle \alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2, \alpha z_1 + \alpha z_2 \rangle \\ &= \alpha \langle x_1, y_1, z_1 \rangle + \alpha \langle x_2, y_2, z_2 \rangle = \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v} \end{aligned}$$

Si, por ejemplo, $\alpha = 2$, $\vec{u} = \langle 1, 0, -2 \rangle$ y $\vec{v} = \langle -3, 1, -2 \rangle$:

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = 2\langle 1, 0, -2 \rangle + 2\langle -3, 1, -2 \rangle = \langle 2, 0, -4 \rangle + \langle -6, 2, -4 \rangle = \langle -4, 2, -8 \rangle$$

2.9 PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DE LA MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR RESPECTO A LA ADICIÓN DE ESCALARES

Dados los escalares α y β y el vector $\vec{u}$, se cumple:

$$(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \quad (2.8)$$

Para demostrar (2.8) efectuamos las siguientes operaciones:

$$(\alpha + \beta) \vec{u} = (\alpha + \beta) \langle x, y, z \rangle$$

Como $\alpha + \beta$ es también un escalar:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \vec{u} &= \langle (\alpha + \beta) x, (\alpha + \beta) y, (\alpha + \beta) z \rangle \\ &= \langle \alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y, \alpha z + \beta z \rangle \\ &= \alpha \langle x, y, z \rangle + \beta \langle x, y, z \rangle = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \end{aligned}$$

✱ EJEMPLO 2.3

Dados los escalares $\alpha = 2$ y $\beta = -1$, y los vectores $\vec{u} = \langle -2, 1, 0 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 3, -5, 2 \rangle$, escribe los siguientes vectores:

a) $\alpha \vec{u}$ b) $\beta \vec{v}$ c) $(\alpha + \beta) \vec{u}$ d) $\beta(\vec{u} + \vec{v})$

☆ Solución

a) $\alpha \vec{u} = 2 \langle -2, 1, 0 \rangle = \langle -4, 2, 0 \rangle$

b) $\beta \vec{v} = (-1) \langle 3, -5, 2 \rangle = \langle -3, 5, -2 \rangle$

c) $(\alpha + \beta) \vec{u} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} = 2 \langle -2, 1, 0 \rangle + (-1) \langle -2, 1, 0 \rangle$
 $= \langle -4, 2, 0 \rangle + \langle 2, -1, 0 \rangle = \langle -2, 1, 0 \rangle$

d) $\beta(\vec{u} + \vec{v}) = \beta \vec{u} + \beta \vec{v} = (-1) \langle -2, 1, 0 \rangle + (-1) \langle 3, -5, 2 \rangle$
 $= \langle 2, -1, 0 \rangle + \langle -3, 5, -2 \rangle = \langle -1, 4, -2 \rangle$

2.10 PROPIEDAD ASOCIATIVA RESPECTO A LA MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

Dados los escalares α y β y el vector $\vec{u} = \langle x, y, z \rangle$, se cumple:

$$\alpha(\beta \vec{u}) = (\alpha \beta) \vec{u}$$

(2.9)

Para demostrar (2.9), escribimos:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta \vec{u}) &= \alpha(\beta \langle x, y, z \rangle) = \alpha(\langle \beta x, \beta y, \beta z \rangle) \\ &= \langle \alpha(\beta x), \alpha(\beta y), \alpha(\beta z) \rangle = (\alpha \beta) \langle x, y, z \rangle = (\alpha \beta) \vec{u} \end{aligned}$$

Si $\alpha = 3$, $\beta = -1$ y $\vec{u} = \langle -3, -1, 4 \rangle$:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta \vec{u}) &= 3 \left[(-1) \langle -3, -1, 4 \rangle \right] = [3 \cdot (-1)] \langle -3, -1, 4 \rangle \\ &= (-3) \langle -3, -1, 4 \rangle = \langle 9, 3, -12 \rangle \end{aligned}$$

2.11 EL ELEMENTO NEUTRO EN LA MULTIPLICACIÓN DE UN VECTOR POR UN ESCALAR

Al número real 1 se le conoce como *elemento neutro* en la multiplicación de un vector por un escalar, de manera que para un vector cualquiera $\vec{u} = \langle x, y, z \rangle$ se cumple:

$$1 \cdot \vec{u} = 1 \langle x, y, z \rangle = \langle x, y, z \rangle = \vec{u}$$

✱ EJEMPLO 2.4

Dados los puntos:

$$A(-1, 4, 3)$$

$$B(2, 3, 5)$$

determina: **a)** El vector de origen A y extremo B , $\vec{AB}$. **b)** El vector de posición correspondiente a $\vec{AB}$. **c)** Si $\vec{PQ}$ es un vector equipolente a $\vec{AB}$ con $P(0, 3, 4)$, determina las coordenadas de Q y expresa $\vec{PQ}$ en términos de sus componentes.

☆ Solución

$$\text{a)} \quad \vec{AB} = \langle 2 - (-1), 3 - 4, 5 - 3 \rangle = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

b) Si llamamos $\vec{u}$ a este vector, se tiene:

$$\vec{u} = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

c) Si $\vec{PQ}$ es equipolente a $\vec{AB}$, sus componentes son las mismas. P tiene como coordenadas $(0, 3, 4)$. Si llamamos (x, y, z) las coordenadas de Q , se tiene:

$$\vec{PQ} = \langle x - 0, y - 3, z - 4 \rangle = \langle x, y - 3, z - 4 \rangle$$

Entonces:

$$\langle x, y - 3, z - 4 \rangle = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

Para que se cumpla la relación anterior, las componentes deben ser iguales:

$$x = 3$$

$$y - 3 = -1$$

$$z - 4 = 2$$

De donde:

$$x = 3, \quad y = 2, \quad z = 6 \Rightarrow Q(3, 2, 6) \quad \vec{PQ} = \langle 3, -1, 2 \rangle$$

✱ EJEMPLO 2.5

Dados los puntos $A(3, -2, 4)$, $B(1, 4, 0)$ y $C(x, y, z)$, determina el valor de las coordenadas de C para que el vector $\vec{AC}$ sea paralelo a $\vec{AB}$, del mismo sentido y tenga el doble de su longitud.

☆ Solución

De acuerdo a lo estudiado en la sección 2.7, para que el vector $\vec{AC}$ sea paralelo a $\vec{AB}$, se debe cumplir:

$$\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$$

Para que $\vec{AC}$ tenga el doble de la magnitud de $\vec{AB}$, $\alpha = 2$, por lo que podemos escribir:

$$\vec{AC} = 2\vec{AB}$$

Los vectores $\vec{AC}$ y $\vec{AB}$ pueden escribirse como:

$$\vec{AC} = \langle x - 3, y + 2, z - 4 \rangle \qquad \vec{AB} = \langle -2, 6, -4 \rangle$$

Entonces:

$$\langle x - 3, y + 2, z - 4 \rangle = 2\langle -2, 6, -4 \rangle$$

Es decir:

$$\langle x - 3, y + 2, z - 4 \rangle = \langle -4, 12, -8 \rangle$$

Se cumple:

$$x - 3 = -4 \Rightarrow x = -1 \quad y + 2 = 12 \Rightarrow y = 10 \quad z - 4 = -8 \Rightarrow z = -4$$

Finalmente: $C(-1, 10, -4)$

✱ EJEMPLO 2.6

Usa el concepto de multiplicación de un escalar por un vector desarrollado en la sección 2.7 para determinar el punto medio del segmento que une a los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$.

☆ Solución

En la fig. 2.4 se muestran los puntos A y B . Si M es el punto medio del

segmento AB , llamaremos a sus coordenadas x_m , y_m y z_m .

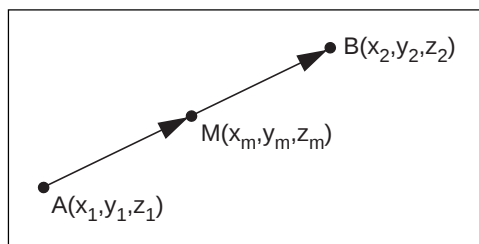


Fig. 2.4 Ejemplo 2.6.

De acuerdo a lo establecido en la sección 2.7, la longitud del vector $\overrightarrow{AB}$ es el doble de la longitud del vector $\overrightarrow{AM}$. Es decir:

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

De donde:

$$2(x_m - x_1) = x_2 - x_1 \Rightarrow 2x_m - 2x_1 = x_2 - x_1 \Rightarrow 2x_m = x_2 + x_1 \Rightarrow x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$2(y_m - y_1) = y_2 - y_1 \Rightarrow 2y_m - 2y_1 = y_2 - y_1 \Rightarrow 2y_m = y_2 + y_1 \Rightarrow y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$2(z_m - z_1) = z_2 - z_1 \Rightarrow 2z_m - 2z_1 = z_2 - z_1 \Rightarrow 2z_m = z_2 + z_1 \Rightarrow z_m = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

✱ EJEMPLO 2.7

a) Determina las coordenadas del punto medio del segmento AB si se conocen $A(3, -5, 2)$ y $B(5, 1, -6)$.

b) Determina las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

☆ Solución

a) De acuerdo al ejemplo 1.5:

$$x_m = \frac{5+3}{2} = 4 \qquad y_m = \frac{1-5}{2} = -2 \qquad z_m = \frac{2-6}{2} = -2$$

b) En la fig. 2.5 se muestra la situación. Para los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP}$, podemos escribir:

$$\vec{AB} = \alpha \vec{AP}$$

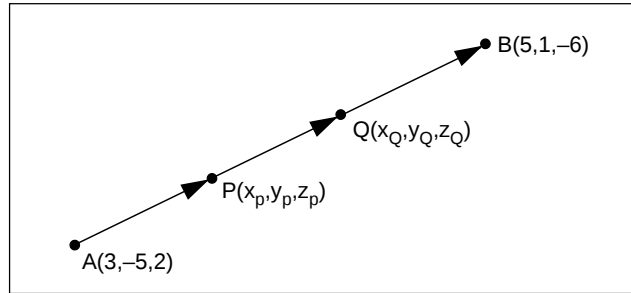


Fig. 2.5 Ejemplo 2.7(b).

Como la longitud del vector $\vec{AB}$ es igual a 3 veces la longitud del vector $\vec{AP}$, $\alpha = 3$, y tenemos:

$$\vec{AB} = 3 \vec{AP} \Rightarrow \langle 2, 6, -8 \rangle = 3 \langle x_p - 3, y_p + 5, z_p - 2 \rangle$$

Entonces:

$$3x_p - 9 = 2 \Rightarrow x_p = \frac{11}{3}$$

$$3y_p + 15 = 6 \Rightarrow y_p = -3$$

$$3z_p - 6 = -8 \Rightarrow z_p = -\frac{2}{3}$$

De manera análoga, como la longitud del vector $\vec{AB}$ es el triple de la longitud del vector $\vec{QB}$, podemos escribir con $\alpha = 3$:

$$\vec{AB} = \alpha \vec{QB} \Rightarrow \vec{AB} = 3 \vec{QB}$$

Por tanto:

$$\langle 2, 6, -8 \rangle = 3 \langle 5 - x_Q, 1 - y_Q, -6 - z_Q \rangle$$

Igualando componentes:

$$15 - 3x_Q = 2 \Rightarrow x_Q = \frac{13}{3}$$

$$3 - 3y_Q = 6 \Rightarrow y_Q = -1$$

$$-18 - 3z_Q = -8 \Rightarrow z_Q = -\frac{10}{3}$$

2.12 SUSTRACCIÓN DE VECTORES

Dados los vectores $\vec{A} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ y $\vec{B} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$, se define la sustracción de vectores, $\vec{A} - \vec{B}$, a la adición del vector $\vec{A}$ con el opuesto de $\vec{B}$:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

Es decir:

$$\vec{A} - \vec{B} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle + \langle -x_2, -y_2, -z_2 \rangle$$

$$\vec{A} - \vec{B} = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2 \rangle \quad (2.10)$$

✱ EJEMPLO 2.8

Dados los vectores $\vec{A} = \langle 1, 7, -3 \rangle$ y $\vec{B} = \langle -3, 0, 2 \rangle$, determina:

$$\text{a) } \vec{A} - \vec{B} \quad \text{b) } -\vec{A} - \vec{B} \quad \text{c) } 2\vec{A} - 3\vec{B}$$

☆ Solución

$$\text{a) } \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \langle 1, 7, -3 \rangle + \langle 3, 0, -2 \rangle = \langle 4, 7, -5 \rangle$$

$$\text{b) } -\vec{A} - \vec{B} = \langle -1, -7, 3 \rangle + \langle 3, 0, -2 \rangle = \langle 2, -7, 1 \rangle$$

$$\text{c) } 2\vec{A} - 3\vec{B} = \langle 2, 14, -6 \rangle + \langle 9, 0, -6 \rangle = \langle 11, 14, -12 \rangle$$

✱ Ejercicios

2.1 Dados los vectores:

$$\vec{A} = \langle 1, 4, -3 \rangle \quad \vec{B} = \langle -3, 5, 10 \rangle \quad \vec{C} = \langle 8, -11, 2 \rangle$$

Determina $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} + \vec{C}$ y $\vec{B} + \vec{C}$.

2.2 Determina un vector $\vec{B} = \langle x, y, z \rangle$, tal que $\vec{A} + \vec{B} = \vec{M}$ si:

$$\text{a) } \vec{A} = \langle -1, 3, -5 \rangle \quad \vec{M} = \langle 3, 2, 6 \rangle$$

$$\text{b) } \vec{A} = \langle -2, 4, -5 \rangle \quad \vec{M} = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

$$\text{c) } A = \langle 1, 2, -2 \rangle \quad \vec{A} = \langle 1, 2, -2 \rangle$$

2.3 Efectúa las siguientes sumas de vectores y representa gráficamente el resultado:

$$\text{a) } \langle -7, 1, 0 \rangle + \langle 6, -3, 0 \rangle$$

$$\text{b) } \langle 3, 2, -1 \rangle + \langle 0, 0, 0 \rangle$$

$$\text{c) } \langle -3, 4, 8 \rangle + \langle 3, -4, -8 \rangle$$

$$\text{d) } \langle 3, 0, 0 \rangle + \langle 0, 0, 3 \rangle$$

2.4 Representa gráficamente los siguientes vectores y sus opuestos:

$$\text{a) } \vec{u} = \langle 2, 3, 3 \rangle$$

$$\text{b) } \vec{v} = \langle 3, -2, 4 \rangle$$

$$\text{c) } \vec{AB} = \langle 0, 3, 4 \rangle$$

$$\text{d) } \vec{PQ} = \langle 0, 0, -3 \rangle$$

2.5 Dados los escalares $\alpha = -1$ y $\beta = 2$ y los vectores:

$$\vec{u} = \langle 3, -5, 10 \rangle$$

$$\vec{v} = \langle 4, 0, -3 \rangle$$

$$\vec{w} = \langle 1, -2, -9 \rangle$$

determina:

$$\text{a) } \alpha \vec{u}$$

$$\text{b) } \beta \vec{v}$$

$$\text{c) } \alpha \vec{w}$$

$$\text{d) } \alpha \vec{u} + \alpha \vec{w}$$

$$\text{e) } \beta \vec{v} + \alpha \vec{w}$$

$$\text{f) } \alpha \vec{v} + \vec{w}$$

$$\text{g) } (\alpha + \beta) \vec{u}$$

$$\text{h) } \beta (\vec{u} + \vec{w})$$

$$\text{i) } (\alpha + \beta)(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$$

2.6 Dados los puntos $A(1, -2, 4)$ y $B(0, 3, -5)$, determina: **a)** El vector $\vec{AB}$.

b) El vector de posición correspondiente a $\vec{AB}$. **c)** Si $\vec{MN}$ es un vector equipolente a $\vec{AB}$, con $M(1, 2, 3)$, determina las coordenadas de N y expresa $\vec{MN}$ en término de sus componentes.

2.7 Dados los puntos $A(0, -3, -2)$, $B(-5, 0, 4)$ y $C(x, y, z)$, determina las coordenadas de C para que el vector $\vec{BC}$ sea paralelo a $\vec{AB}$, del mismo sentido y tenga la mitad de su longitud.

2.8 Si $A(3, 5, 2)$, $B(-1, -2, 0)$ y $C(x, y, z)$, ¿qué valores deben tener x, y y

z para que el vector $\vec{AC}$ sea paralelo al vector $\vec{AB}$, de sentido contrario y tenga tres veces su longitud.

2.9 Si $A(-7, 3, 10)$ y $B(7, 1, 6)$, determina las coordenadas del punto medio del segmento AB .

2.10 Si $A(0, 0, 1)$ y $B(-1, -2, 0)$, determina las coordenadas de los puntos P y Q que dividen al segmento AB en tres partes iguales.

2.11 Dados los vectores $\vec{A} = \langle -5, -2, -1 \rangle$ y $\vec{B} = \langle 3, 0, -3 \rangle$ y los escalares $\alpha = 2$, $\beta = -3$, determina:

a) $\vec{A} - \vec{B}$

b) $-\vec{A} - \vec{B}$

c) $\alpha \vec{A} - \vec{B}$

d) $-(\alpha + \beta) \vec{A}$

e) $\alpha \vec{A} - \beta \vec{B}$

f) $-(\alpha + \beta)(\vec{B} - \vec{A})$

2.13 APLICACIONES DE VECTORES EN FÍSICA

Hasta ahora hemos estudiado vectores desde un punto de vista matemático. El uso de vectores en la física y varias ramas de la ingeniería está ampliamente difundido, sobre todo a nivel superior. En esta sección desarrollamos varios ejemplos que permitirán tender un puente entre los conocimientos teóricos adquiridos y las aplicaciones prácticas.

Muchos de los ejemplos que siguen están referidos a la rama de la física llamada estática, que se refiere a cuerpos o partículas que no están en movimiento. Se supone que un cuerpo o una partícula está sometida a un conjunto de fuerzas que pueden ser representadas como vectores. A la adición de estas fuerzas se le conoce como *fuerza resultante*. En el caso de cuerpos en reposo, sometido a la adición de varias fuerzas, esta resultante es igual a cero.

Desde la óptica matemática, basta con establecer las componentes de un vector en la forma $\langle x, y, z \rangle$, para poder operar con el mismo. En cambio, en las aplicaciones prácticas se opera a partir del módulo de un vector y del ángulo que forma con los ejes coordenados. Como veremos, es posible establecer la relación entre ambos puntos de vista.

A fin de facilitar la solución de los ejemplos que siguen, recordamos acá las relaciones que permiten representar a vectores en el plano y el espacio, considerando sólo vectores de posición.

a) *Vectores en el plano:* (v : magnitud de $\vec{v}$, α : ángulo de $\vec{v}$)

$$\text{Vector de posición: } \vec{v} = \langle x, y \rangle \quad \text{Forma polar: } \vec{v} = \langle v, \alpha \rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \tan^{-1} \frac{y}{x} \\ x = v \cos \alpha \\ y = v \sin \alpha \end{array} \right.$$

b) *Vectores en el espacio*

Representación mediante sus componentes: $\vec{v} = \langle x, y, z \rangle$, (v : magnitud de $\vec{v}$), (α, β, γ : cosenos directores de $\vec{v}$)

$$\text{Forma polar: } \vec{v} = \langle v, (\alpha, \beta, \gamma) \rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos \alpha = \frac{x}{v} \\ \cos \beta = \frac{y}{v} \\ \cos \gamma = \frac{z}{v} \end{array} \right. \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

✱ EJEMPLO 2.9

Un camión accidentado es arrastrado mediante dos cuerdas, como se muestra en la fig. 2.6. La tensión en la cuerda AB es de 20 Newton. Si la fuerza resultante está dirigida a lo largo del eje del camión, determina la tensión en la cuerda AC y la magnitud de la fuerza resultante sobre el mismo.

☆ Solución

Para resolver este ejemplo, hacemos coincidir el origen de un sistema de coordenadas X - Y con el punto común, A , de las cuerdas AB y AC . De esta

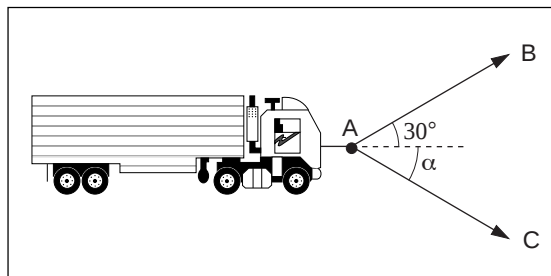


Fig. 2.6 Ejemplo 2.9.

forma se obtiene la fig. 2.7. La tensión en el cable AB podemos hacerlo corresponder al módulo del vector $\vec{AB}$. Luego, podemos escribir:

$$\vec{AB} = \langle 20, 30^\circ \rangle$$

A partir de las relaciones ya estudiadas, podemos escribir:

$$x = 20 \cos 30^\circ = 17,32$$

$$y = 20 \operatorname{sen} 30^\circ = 10$$

Observa que esto nos permite escribir al vector $\vec{AB}$ en términos de sus componentes:

$$\vec{AB} = \langle 17,32; 10 \rangle$$

Para que la resultante esté a lo largo del eje del camión, es necesario que la magnitud del vector $\vec{AC}$ sea igual a la del vector $\vec{AB}$ y que α sea igual a -30° es decir, $AB = 20$ N. Podemos entonces escribir:

$$\vec{AC} = \langle 20, -30^\circ \rangle$$

Lo que nos dice que la tensión en la cuerda AC, representada por la magnitud del vector $\vec{AC}$ es 20 N.

De la relación anterior:

$$x = 20 \cos (-30^\circ) = -17,32 \quad y = 20 \operatorname{sen} (-30^\circ) = -10$$

El vector $\vec{AC}$ puede expresarse en términos de sus componentes como:

$$\vec{AC} = \langle 17,32; -10 \rangle$$

La resultante $\vec{R}$ de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ es:

$$\vec{R} = \vec{AB} + \vec{AC} = \langle 17,32; 10 \rangle + \langle 17,32; -10 \rangle = \langle 34,64; 0 \rangle$$

La magnitud de $\vec{R}$ en Newtons es:

$$R = \sqrt{(34,64)^2 + 0^2} = 5,86$$

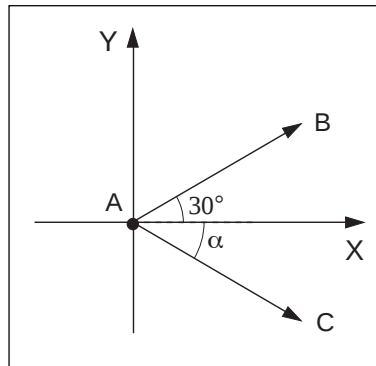


Fig. 2.7 Inclusión de un sistema de coordenadas X-Y para resolver el ejemplo 2.9.

✱ EJEMPLO 2.10

Determina el valor de la magnitud y dirección de la fuerza resultante de las dos fuerzas mostradas en la fig. 2.8.

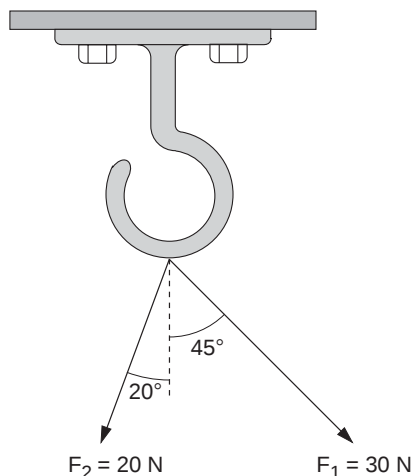


Fig. 2.8 Esquema para el ejemplo 2.10.

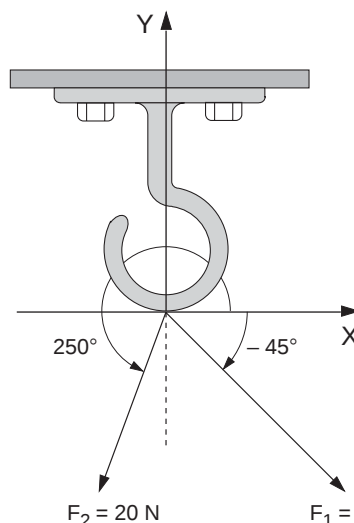


Fig. 2.9 Diagrama para el ejemplo 2.10 con inclusión de ejes cartesianos.

☆ Solución

Con el fin de resolver el problema, consideremos un sistema de coordenadas rectangulares con el origen en el punto donde se aplican las dos fuerzas, tal como se muestra en la fig. 2.9. Los ángulos que forman los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ se miden ahora con respecto al eje de las X. El ángulo de $\vec{F}_1$ es $\alpha_1 = -45^\circ$ y el ángulo de $\vec{F}_2$ es de 250° . Una vez establecidos los valores de estos ángulos, podemos escribir:

$$\vec{F}_1 = \langle 30, -45^\circ \rangle \quad \vec{F}_2 = \langle 20, 250^\circ \rangle$$

Desarrollando las expresiones anteriores:

$$\vec{F}_1 = \langle 30 \cos(-45^\circ), 20 \sin(-45^\circ) \rangle = \langle 21, 21; -21, 21 \rangle$$

$$\vec{F}_2 = \langle 20 \cos 250^\circ, 20 \sin 250^\circ \rangle = \langle -6, 84; -18, 79 \rangle$$

La fuerza resultante, $\vec{R}$, es la suma de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$:

$$\vec{R} = \langle 21, 21; -21, 21 \rangle + \langle -6, 84; -18, 79 \rangle = \langle 14, 46; -40 \rangle$$

La magnitud de la resultante es:

$$R = \sqrt{(14,46)^2 + (-40)^2} = \sqrt{209,09 + 1.600} = 42,53$$

La dirección de la fuerza resultante está dada por el ángulo α_R :

$$\alpha_R = \tan^{-1}\left(\frac{-40}{14,46}\right) = -70,13^\circ$$

El vector $\vec{R}$ puede ser expresado como:

$$\vec{R} = \langle 42,63; -83,65^\circ \rangle$$

En la fig. 2.10 se muestra la resultante $\vec{R}$.

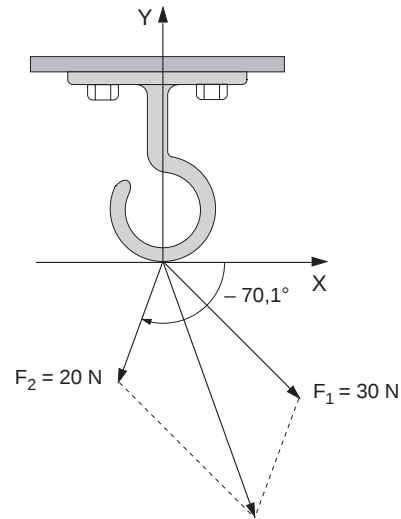


Fig. 2.10 Fuerzas actuantes y resultante para el ejemplo 2.10.

✱ EJEMPLO 2.11

Una torre de transmisión está sujeta por tres guayas, como se muestra en la fig. 2.11. Determina la tensión en la guaya AC para que la fuerza resultante sobre la torre sea vertical. ¿Cuál es el módulo de la fuerza resultante?

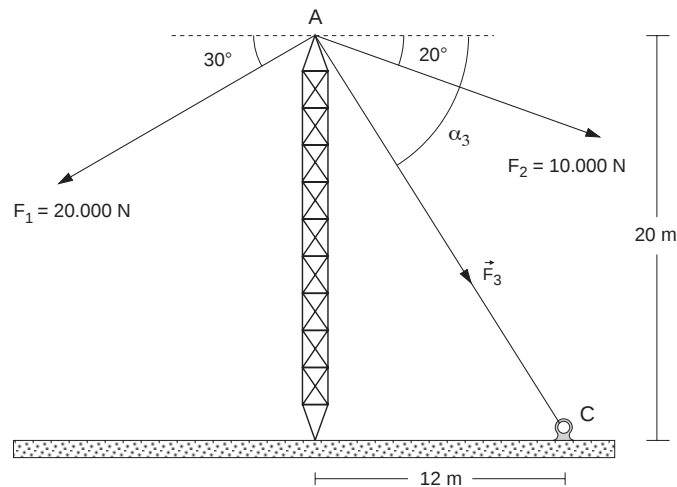


Fig. 2.11 Esquema para el ejemplo 2.11.

★ Solución

Si tomamos el punto A como origen de un sistema de coordenadas cartesianas, obtenemos el diagrama de fuerzas de la fig. 2.12. En dicho diagrama se omiten los componentes físicos del sistema y las operaciones a realizar se basan únicamente en los vectores que representan las fuerzas aplicadas en el punto A de la torre. El ángulo α_3 del vector $\vec{F}_3$ está dado por:

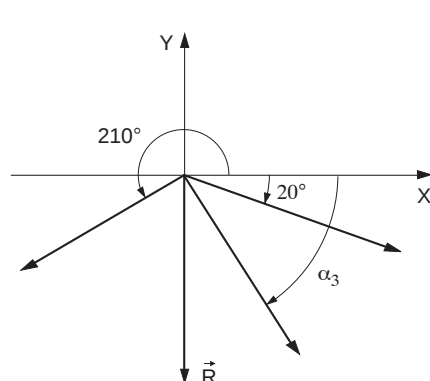


Fig. 2.12 Diagrama de fuerzas para el ejemplo 2.11.

$$\alpha_3 = \tan^{-1} \frac{-20}{12} = -59,04^\circ$$

El vector $\vec{F}_3$ puede expresarse como:

$$\vec{F}_3 = \langle F_3, -59,04^\circ \rangle$$

o también:

$$\vec{F}_3 = \langle F_3 \cos(-59,04^\circ); F_3 \sin(-59,04^\circ) \rangle$$

$$\vec{F}_3 = \langle 0,51 F_3; -0,86 F_3 \rangle$$

Para que la fuerza resultante $\vec{R}$ sea vertical, es necesario que se exprese de la siguiente forma:

$$\vec{R} = \langle 0, -R \rangle \quad (\text{ya que la componente horizontal no existe})$$

o también: $\vec{R} = (R, 90^\circ)$

Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ pueden escribirse como:

$$\vec{F}_1 = (20.000, 210^\circ) = \langle 20.000 \cos 210^\circ; 20.000 \sin 210^\circ \rangle$$

$$\vec{F}_1 = \langle -17.320, 51; -10.000 \rangle$$

$$\vec{F}_2 = (10.000, -20^\circ) = \langle 10.000 \cos(-20^\circ); 10.000 \sin(-20^\circ) \rangle$$

$$\vec{F}_2 = \langle 9.396, 93; -3.420, 20 \rangle$$

La suma de $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ es igual a la fuerza resultante $\vec{R}$:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R}$$

Sustituyendo valores:

$$\langle -17.320,51; -10.000 \rangle + \langle 9.396,93; -3.420,20 \rangle + \langle 0,51 F_3; -0,86 F_3 \rangle = \langle 0, -R \rangle$$

$$\langle -7.923,58 + 0,45 F_3; -13.420,20 - 0,89 F_3 \rangle = \langle 0, -R \rangle$$

Iguálamo componentes:

$$-7.923,58 + 0,45 F_3 = 0 \Rightarrow F_3 = \frac{7.923,58}{0,45} \Rightarrow F_3 = 17.607,96 \text{ N}$$

$$-13.420,20 - 0,89 F_3 = -R \Rightarrow R = 13.420,20 + 0,89 \cdot 17.607,96$$

$$R = 29.091,28 \text{ N}$$

✱ EJEMPLO 2.12

Dos cuerdas sostienen un peso correspondiente a una fuerza de 2.000 N, tal como se muestra en la fig. 2.13. Determina las tensiones en las cuerdas AC y BC si el sistema está en equilibrio.

☆ Solución

Como el sistema está en equilibrio, la fuerza resultante sobre cualquier punto del mismo es igual a cero. Si tomamos al punto C como origen de un sistema de coordenadas XY, podemos dibujar el diagrama de la fig. 2.14. La tensión en la cuerda AC es representada por la fuerza $\vec{F}_1$, que puede expresarse como:

$$\vec{F}_1 = \langle F_1, \alpha_1 \rangle$$

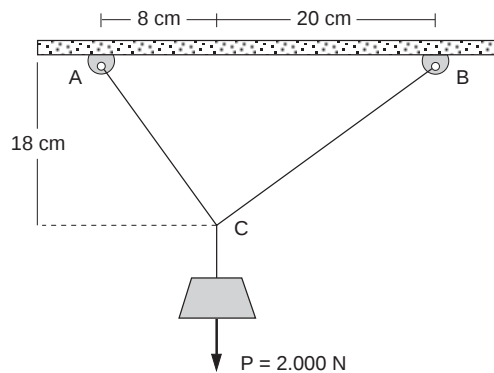


Fig. 2.13 Diagrama físico para el ejemplo 2.12.

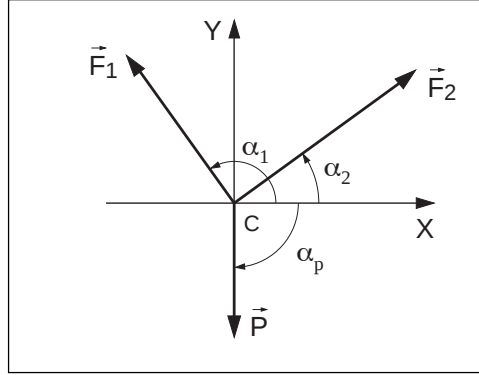


Fig. 2.14 Diagrama de fuerzas para el ejemplo 2.12.

El ángulo α_1 está dado por:

$$\alpha_1 = 90^\circ + \tan^{-1} \frac{8}{18} = 90^\circ + 23,96^\circ = 113,96^\circ$$

Luego:

$$\vec{F}_1 = (F_1; 113,96^\circ) = \langle F_1 \cos 113,96^\circ; F_1 \sin 113,96^\circ \rangle = \langle -0,41 F_1, 0,91 F_1 \rangle$$

La tensión en la cuerda BC la representaremos por la fuerza $\vec{F}_2$, que puede expresarse como:

$$\vec{F}_2 = \langle F_2, \alpha_2 \rangle$$

donde:

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \frac{18}{20} = 41,99^\circ$$

Luego:

$$\vec{F}_2 = \langle F_2; 41,99^\circ \rangle = \langle F_2 \cos 41,99^\circ; F_2 \sin 41,99^\circ \rangle = \langle 0,74 F_2, 0,67 F_2 \rangle$$

El peso del cuerpo se puede escribir en forma vectorial como:

$$\vec{P} = (P, -90^\circ) = \langle P \cos(-90^\circ); P \sin(-90^\circ) \rangle = \langle 0, -P \rangle$$

Como $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{P} = 0$:

$$\langle -0,41 F_1; 0,91 F_1 \rangle + \langle 0,74 F_2, 0,67 F_2 \rangle + \langle 0, -P \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

Como $P = 2.000 \text{ N}$:

$$\langle -0,41 F_1 + 0,74 F_2; 0,91 F_1 + 0,67 F_2 - 2.000 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

Igualando componentes:

$$-0,41 F_1 + 0,74 F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = \frac{0,41}{0,74} F_1 \Rightarrow F_2 = 0,55 F_1$$

$$0,91 F_1 + 0,67 F_2 - 2.000 = 0 \Rightarrow 0,91 F_1 + 0,67 F_2 = 2.000 \Rightarrow 1,58 F_1 = 2.000$$

Luego:

$$F_1 = 1.267,40 \text{ N} \quad F_2 = 697,07 \text{ N}$$

✧ EJEMPLO 2.13

Una torre de transmisión eléctrica está anclada en el punto A con una guaya sujeta a un perno (fig. 2.15). La tensión de la guaya es de 1.000 N . Determina:

a) Los ángulos α_F , β_F y γ_F que determinan la dirección de $\vec{F}$. **b)** Las componentes F_x , F_y y F_z del vector correspondiente a la fuerza $\vec{F}$ de tensión.

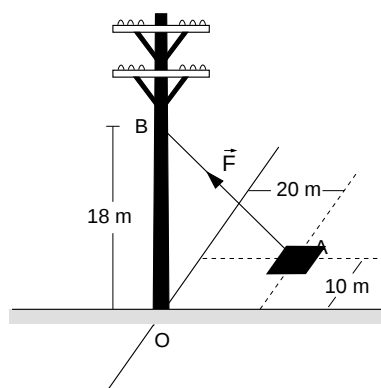


Fig. 2.15 Ejemplo 2.13.

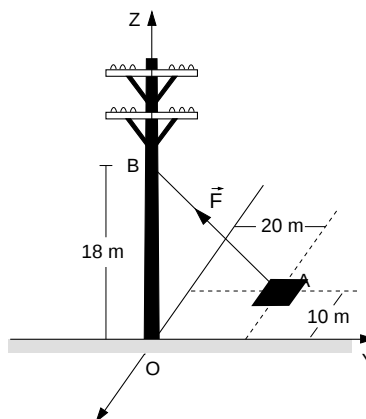


Fig. 2.16 Ubicación de un sistema de coordenadas XYZ para el ejemplo 2.13.

☆ Solución

a) Situemos un sistema de coordenadas con origen en el punto O sobre el eje de la torre, tal como se muestra en la fig. 2.16.

Las coordenadas de los puntos A y B son:

$$A(-10, 20, 0) \quad B(0, 0, 18)$$

El vector $\vec{AB}$, está dado por:

$$\vec{AB} = \langle 10, -20, 18 \rangle$$

El vector $\vec{F}$ tiene la misma dirección del vector $\vec{AB}$; por tanto, si conocemos los ángulos α_{AB} , β_{AB} y γ_{AB} de $\vec{AB}$, también conocemos los ángulos α_F , β_F y γ_F del vector $\vec{F}$. El módulo de $\vec{AB}$ es:

$$AB = \sqrt{10^2 + (-20)^2 + 18^2} = \sqrt{824} = 28,71$$

Luego:

$$\cos \alpha_{AB} = \frac{x}{AB} = \frac{10}{28,71} \approx 0,35 \Rightarrow \alpha_{AB} = \alpha_F = 69,62^\circ$$

$$\cos \beta_{AB} = \frac{y}{AB} = \frac{-20}{28,71} \approx -0,70 \Rightarrow \beta_{AB} = \beta_F = 134,16^\circ$$

$$\cos \gamma_{AB} = \frac{z}{AB} = \frac{18}{28,71} = 0,63 \Rightarrow \gamma_{AB} = \gamma_F = 51,17^\circ$$

b) Como conocemos el módulo de $\vec{F}$, 1.000 N, podemos escribir:

$$\vec{F} = \langle 1.000; (69,62^\circ; 134,16^\circ; 51,17^\circ) \rangle$$

Las componentes x , y y z de $\vec{F}$ son:

$$F_x = F \cos \alpha_F = 1.000 \cdot 0,35 = 350 \Rightarrow F_x = 350 \text{ N}$$

$$F_y = F \cos \beta_F = 1.000 \cdot (-0,70) = -700 \Rightarrow F_y = -700 \text{ N}$$

$$F_z = F \cos \gamma_F = 1.000 \cdot 0,63 = 630 \Rightarrow F_z = 630 \text{ N}$$

El signo negativo para F_y indica que la fuerza, según el eje Y , está dirigida hacia la izquierda.

* Ejercicios

2.12 Un ferry es arrastrado por dos remolcadores, como se muestra en la fig. 2.17. Si la resultante de las fuerzas ejercidas por los dos remolcadores es de 25.000 N y está dirigida a lo largo del eje del ferry, determina el valor de la tensión en cada guaya de remolque.

2.13 Una piñata de masa 10 Kg está sostenida por dos cuerdas, como se muestra en la fig. 2.18. Determina las tensiones en las cuerdas si el sistema está en equilibrio.

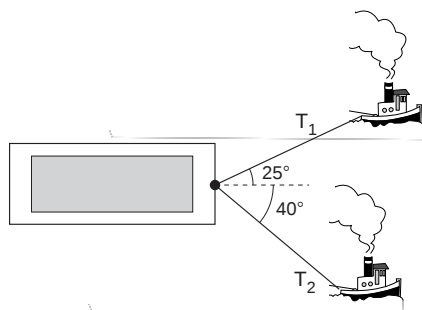


Fig. 2.17 Ejercicio 2.12.

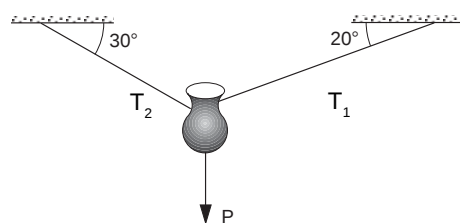


Fig. 2.18 Ejercicio 2.13.

2.14 Una estaca clavada en el piso soporta la tensión de dos cuerdas que sostienen una tienda de campaña (fig. 2.19). Determina la tensión T_2 en una de las cuerdas para que la fuerza resultante sea vertical.

2.15 Determina el valor de las componentes de las fuerzas mostradas en la fig. 2.20 y la magnitud y dirección de la resultante.

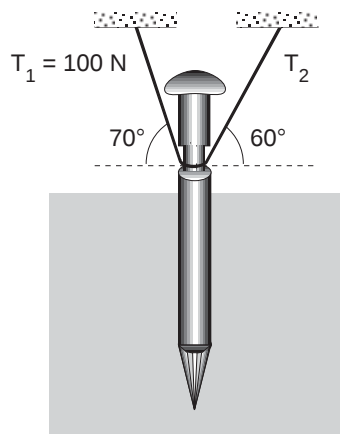


Fig. 2.19 Ejercicio 2.14.

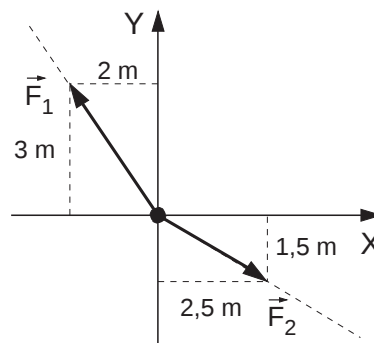


Fig. 2.20 Ejercicio 2.15.

2.16 Para levantar una caja de madera de 16 kg se usa el sistema mostrado en la fig. 2.21. Si las fuerzas están dirigidas a lo largo de las cuerdas AC y AB, determina las componentes de cada una de ellas.

2.17 Si el sistema de la fig. 2.22 está en equilibrio y las fuerzas están dirigidas a lo largo de las cuerdas, determina las tensiones en las cuerdas AB y CB.

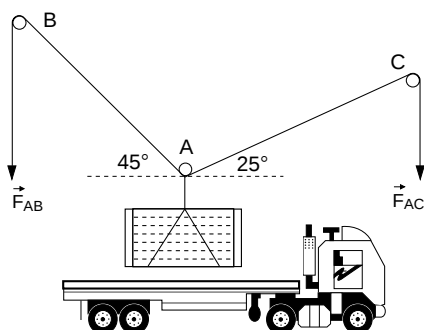


Fig. 2.21 Ejercicio 2.16.

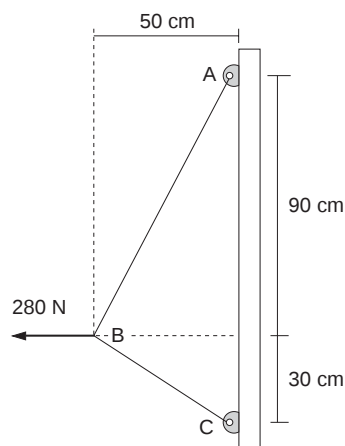


Fig. 2.22 Ejercicio 2.17.

2.18 Determina las tensiones en las cuerdas BA y BC si el sistema de la fig. 2.23 está en equilibrio y las tensiones en las cuerdas están dirigidas a lo largo de las mismas.

2.19 Para las fuerzas mostradas en la fig. 2.24, determina las componentes de los vectores y los ángulos que forman con los ejes coordenados.

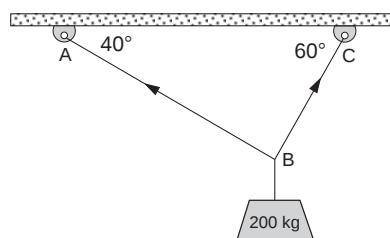


Fig. 2.23 Ejercicio 2.18.

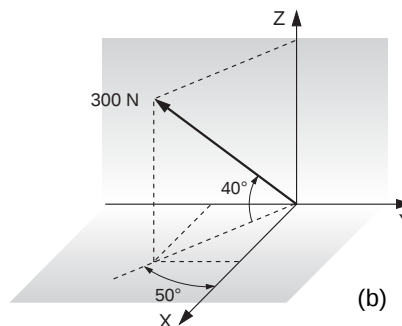
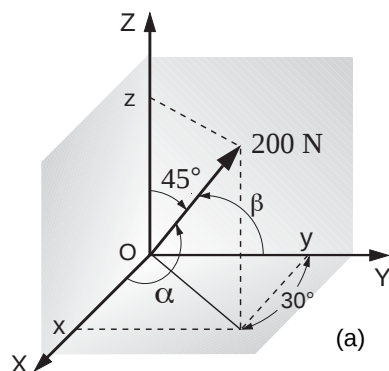


Fig. 2.24 Ejercicio 2.19.

2.20 El cable AB de la fig. 2.25 tiene 30 m de longitud. Si la tensión en ese cable es de 20.000 N, ¿cuáles son las componentes de la fuerza sobre el anclaje.

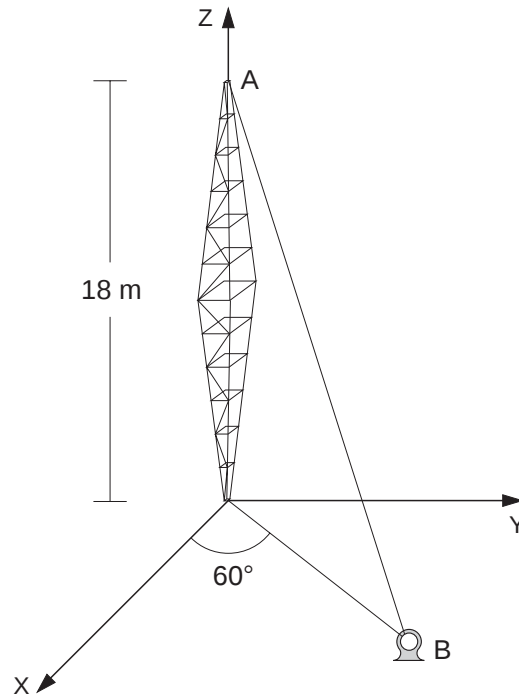


Fig. 2.25 Ejercicio 2.20.

DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL EN $\mathbb{R}^3$

3.1 COMBINACIÓN LINEAL DE DOS VECTORES

Considera los vectores $\vec{u} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 2, -5, 4 \rangle$ y los escalares $\alpha = 2$ y $\beta = 3$. Formemos el vector $\vec{w}$ dado por $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$:

$$\vec{w} = 2\langle 1, 2, 3 \rangle + 3\langle 2, -5, 4 \rangle = \langle 2, 4, 6 \rangle + \langle 6, -15, 12 \rangle = \langle 8, -11, 18 \rangle$$

$$\vec{w} = \langle 8, -11, 18 \rangle$$

El vector formado sumando $\alpha \vec{u}$ y $\beta \vec{v}$, se dice que es una *combinación lineal* de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. A los escalares α y β se les conoce como *coeficientes de la combinación lineal*.

En general, se dice que un vector es combinación lineal de otros vectores $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{z}$, si existen números reales $\alpha, \beta, \dots, \zeta$ que hagan cumplir la relación:

$$\vec{u} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \dots + \zeta \vec{z} \quad (3.1)$$

donde $\alpha, \beta, \dots, \zeta$ son números reales (escalares).

✱ EJEMPLO 3.1

a) Dados los vectores $\vec{u} = \langle -4, 3, 1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 5, 0, 2 \rangle$, determina el vector $\vec{w}$ correspondiente a la combinación lineal $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$.

b) Determina los escalares α y β que hacen al vector $\vec{w} = \langle 7, -10, 3 \rangle$ una combinación lineal de los vectores $\vec{u} = \langle 1, -2, 1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle -1, 0, 4 \rangle$.

c) Determina si existen escalares α y β que hacen que el vector $\vec{w} = \langle 3, 0, 5 \rangle$ sea una combinación lineal de los vectores $\vec{u} = \langle 1, -2, 1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle -1, 0, 4 \rangle$.

☆ **Solución**

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \vec{w} &= 3\vec{u} - 2\vec{v} = 3\langle -4, 3, 1 \rangle - 2\langle 5, 0, 2 \rangle = \langle -12, 9, 3 \rangle + \langle -10, 0, -4 \rangle \\ \vec{w} &= \langle -22, 9, -1 \rangle \end{aligned}$$

b) Si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \Rightarrow \langle 7, -10, -3 \rangle = \alpha\langle 1, -2, 1 \rangle + \beta\langle -1, 0, 4 \rangle \\ \langle 7, -10, -3 \rangle &= \langle \alpha, -2\alpha, \alpha \rangle + \langle -\beta, 0, 4\beta \rangle \\ \langle 7, -10, -3 \rangle &= \langle \alpha - \beta, -2\alpha, \alpha + 4\beta \rangle \end{aligned}$$

Igualando componentes:

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &= 7 & \textcircled{1} \\ -2\alpha &= -10 & \textcircled{2} \\ \alpha + 4\beta &= -3 & \textcircled{3} \end{aligned}$$

De la relación $\textcircled{2}$, obtenemos $\alpha = 5$. Si este valor de α es sustituido en las relaciones $\textcircled{1}$ y $\textcircled{3}$, se obtiene el mismo valor de β en ambos casos. En efecto:

$$\text{Relación } \textcircled{1}: \quad \beta = \alpha - 7 = 5 - 7 = -2$$

$$\text{Relación } \textcircled{3}: \quad \beta = \frac{-3 - \alpha}{4} = \frac{-3 - 5}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

$$\text{Luego:} \quad \vec{w} = 5\vec{u} - 2\vec{v}$$

Si los valores de β obtenidos en las relaciones $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$ hubieran sido distintos, el vector $\vec{w}$ no sería combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\text{c) Se debe cumplir:} \quad \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

$$\langle 3, 0, 5 \rangle = \alpha \langle 1, -2, 1 \rangle + \beta \langle -1, 0, 4 \rangle$$

$$\langle 3, 0, 5 \rangle = \langle \alpha, -2\alpha, \alpha \rangle + \langle -\beta, 0, 4\beta \rangle$$

$$\langle 3, 0, 5 \rangle = \langle \alpha - \beta, -2\alpha, \alpha + 4\beta \rangle$$

Igualando componentes:

$$\alpha - \beta = 3 \quad \textcircled{1}$$

$$-2\alpha = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\alpha + 4\beta = 5 \quad \textcircled{3}$$

De $\textcircled{2}$, obtenemos $\alpha = 0$. Sustituyendo en $\textcircled{1}$ y $\textcircled{3}$:

$$\text{Relación } \textcircled{1}: \beta = -3$$

$$\text{Relación } \textcircled{3}: \beta = \frac{5}{4}$$

Como se obtienen valores distintos de β , el vector $\vec{w}$ no puede ser combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Como puedes observar del ejemplo anterior, para determinar las dos constantes, α y β , en una relación que envuelve vectores de tres componentes, es necesario plantear un sistema de ecuaciones de tres ecuaciones con dos incógnitas. Para que el sistema tenga solución, se debe cumplir que los valores de las constantes α y β sean únicos. De suceder lo contrario, el sistema no tiene solución y no es posible determinar α y β . Veamos qué pasa cuando se trata de expresar un vector cualquiera como combinación lineal de otros tres vectores.

✱ EJEMPLO 3.2

Expresa el vector $\vec{w} = \langle 26, 26, -13 \rangle$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = \langle 1, 0, -2 \rangle$, $\vec{v} = \langle 4, 2, -3 \rangle$ y $\vec{z} = \langle 3, 5, 0 \rangle$.

☆ Solución

Podemos expresar $\vec{w}$ como:

$$\vec{w} = \alpha \langle 1, 0, -2 \rangle + \beta \langle 4, 2, -3 \rangle + \gamma \langle 3, 5, 0 \rangle$$

$$\langle 26, 26, -13 \rangle = \langle \alpha, 0, -2\alpha \rangle + \langle 4\beta, 2\beta, -3\beta \rangle + \langle 3\gamma, 5\gamma, 0 \rangle$$

$$\langle 26, 26, -13 \rangle = \langle \alpha + 4\beta + 3\gamma, 2\beta + 5\gamma, -2\alpha - 3\beta \rangle$$

Igualando componentes:

$$\alpha + 4\beta + 3\gamma = 26 \quad \textcircled{1}$$

$$2\beta + 5\gamma = 26 \quad \textcircled{2}$$

$$-2\alpha - 3\beta = -13 \quad \textcircled{3}$$

El sistema de ecuaciones resultantes tiene 3 ecuaciones y 3 incógnitas, lo que garantiza soluciones únicas para α , β y γ . Si multiplicamos la ecuación $\textcircled{2}$ por 3 y y la ecuación $\textcircled{3}$ por 2, y sumamos las relaciones resultantes:

$$\left. \begin{array}{rcl} 6\beta + 15\gamma & = & 78 \\ -4\alpha - 6\beta & = & -26 \end{array} \right\} \quad -4\alpha + 15\gamma = 52 \quad \checkmark$$

Multiplicando $\textcircled{2}$ por -2 y sumando con $\textcircled{1}$:

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha + 4\beta + 3\gamma & = & 26 \\ -4\beta - 10\gamma & = & -52 \end{array} \right\} \quad \alpha - 7\gamma = -26 \quad \infty$$

Multiplicando ∞ por 4 y sumando con $\checkmark$:

$$\left. \begin{array}{rcl} -4\alpha + 15\gamma & = & 52 \\ 4\alpha - 28\gamma & = & -104 \end{array} \right\} \quad -13\gamma = -52 \Rightarrow \gamma = 4$$

De ∞ : $\alpha = -26 + 7\gamma = -26 + 28 \Rightarrow \alpha = 2$

De $\textcircled{2}$: $\beta = \frac{26 - 5\gamma}{2} = \frac{26 - 20}{2} = 3 \Rightarrow \beta = 3$

Luego, podemos escribir:

$$\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v} + 4\vec{z} = 2\langle 1, 0, -2 \rangle + 3\langle 4, 2, -3 \rangle + 4\langle 3, 5, 0 \rangle$$

Un último caso que discutiremos corresponde a un vector $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ expresado como una combinación lineal de otros 4 vectores dados por:

$$\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \quad \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle \quad \vec{x} = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \quad \vec{z} = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$$

Es decir, podemos escribir:

$$\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w} + \gamma \vec{x} + \delta \vec{z}$$

donde α, β, γ y δ son constantes a determinar (incógnitas).

Sustituyendo valores:

$$\vec{u} = \alpha \langle v_1, v_2, v_3 \rangle + \beta \langle w_1, w_2, w_3 \rangle + \gamma \langle x_1, x_2, x_3 \rangle + \delta \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$$

Igualando componentes:

$$\alpha v_1 + \beta w_1 + \gamma x_1 + \delta z_1 = u_1$$

$$\alpha v_2 + \beta w_2 + \gamma x_2 + \delta z_2 = u_2$$

$$\alpha v_3 + \beta w_3 + \gamma x_3 + \delta z_3 = u_3$$

Se obtiene así un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas. En otras palabras, hay menos ecuaciones que incógnitas. Este tipo de sistema de ecuaciones admite infinitas soluciones diferentes, por lo que el vector $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ en R^3 puede ser siempre expresado como una combinación lineal de $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ y $\vec{z}$. En general, podemos afirmar que:

Un vector en R^3 puede ser siempre expresado como una combinación lineal de cuatro o más vectores.

✱ EJEMPLO 3.3

Expresa el vector $\vec{u} = \langle 1, 0, 2 \rangle$ como combinación lineal de los siguientes vectores:

$$\vec{v} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \vec{w} = \langle -1, 1, 0 \rangle \quad \vec{x} = \langle 1, 1, 1 \rangle \quad \vec{z} = \langle 0, 0, 2 \rangle$$

☆ Solución

De acuerdo con la definición de combinación lineal:

$$\langle 1, 0, 2 \rangle = \alpha \langle 1, 0, 0 \rangle + \beta \langle -1, 1, 0 \rangle + \gamma \langle 1, 1, 1 \rangle + \delta \langle 0, 0, 2 \rangle$$

$$\langle 1, 0, 2 \rangle = \langle \alpha, 0, 0 \rangle + \langle -\beta, \beta, 0 \rangle + \langle \gamma, \gamma, \gamma \rangle + \langle 0, 0, 2\delta \rangle$$

$$\langle 1, 0, 2 \rangle = \langle \alpha - \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma + 2\delta \rangle$$

Igualando componentes:

$$\alpha - \beta + \gamma = 1 \quad \text{①}$$

$$\beta + \gamma = 0 \quad \text{②}$$

$$\gamma + 2\delta = 2 \quad \text{③}$$

Pongamos las constantes α , β y δ en términos de γ :

$$\text{De ② :} \quad \beta = -\gamma$$

$$\text{De ① :} \quad \alpha + \gamma + \gamma = 1 \Rightarrow \alpha = 1 - 2\gamma$$

$$\text{De ③ :} \quad 2\delta = 2 - \gamma \Rightarrow \delta = \frac{2 - \gamma}{2}$$

El sistema anterior admite infinitas soluciones, dependiendo del valor que asignamos a γ . Así:

$$\gamma = 0: \quad \beta = 0, \quad \alpha = 1, \quad \delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \vec{v} + \vec{z}$$

$$\gamma = 1: \quad \beta = -1, \quad \alpha = -1, \quad \delta = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = -\vec{v} - \vec{w} + \frac{1}{2}\vec{z}$$

$$\gamma = 2: \quad \beta = -2, \quad \alpha = -3, \quad \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = -3\vec{v} - 2\vec{w} + 2\vec{x}$$

* Ejercicios

3.1 Dados los vectores $\vec{u} = \langle -2, 5, 0 \rangle$, $\vec{v} = \langle 3, -2, 1 \rangle$ y $\vec{w} = \langle -2, 2, 4 \rangle$ determina el vector $\vec{z}$ correspondiente a las siguientes combinaciones lineales:

a) $\vec{z} = 2\vec{u} - \vec{w}$

b) $\vec{z} = 10\vec{u} + 5\vec{v} - 3\vec{w}$

c) $\vec{z} = -\vec{v} + 3\vec{w}$

3.2 Determina los escalares α y β que hacen al vector $\vec{u}$ una combinación lineal de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ ($\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$):

a) $\vec{u} = \langle -1, -3, 6 \rangle$ $\vec{v} = \langle 0, 1, -2 \rangle$ $\vec{w} = \langle -2, 0, 0 \rangle$

b) $\vec{u} = \langle -9, 34, -3 \rangle$ $\vec{v} = \langle -3, 5, 0 \rangle$ $\vec{w} = \langle 2, 3, -1 \rangle$

c) $\vec{u} = \langle 0, -4, 5 \rangle$ $\vec{v} = \langle 3, -9, 27 \rangle$ $\vec{w} = \langle \frac{1}{7}, -1, 2 \rangle$

3.3 Determina si existen vectores α y β que hacen que el vector $\vec{u}$ sea una combinación lineal de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$:

a) $\vec{u} = \langle 2, 5, -3 \rangle$ $\vec{v} = \langle 0, 2, -2 \rangle$ $\vec{w} = \langle 2, -1, -1 \rangle$

b) $\vec{u} = \langle -2, 9, -2 \rangle$ $\vec{v} = \langle 1, -1, 1 \rangle$ $\vec{w} = \langle -1, 2, 1 \rangle$

c) $\vec{u} = \langle 3, 0, -3 \rangle$ $\vec{v} = \langle 4, 1, 0 \rangle$ $\vec{w} = \langle -5, 2, -1 \rangle$

3.4 Expresa el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}$ ($\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \delta\vec{z}$):

a) $\vec{w} = \langle 0, 5, 0 \rangle$ $\vec{u} = \langle 1, 3, 4 \rangle$ $\vec{v} = \langle 0, 1, -2 \rangle$ $\vec{z} = \langle -2, 0, 0 \rangle$

b) $\vec{w} = \langle 6, 1, -7 \rangle$ $\vec{u} = \langle 1, -1, 2 \rangle$ $\vec{v} = \langle 3, 0, 3 \rangle$ $\vec{z} = \langle 3, 0, -2 \rangle$

c) $\vec{w} = \langle 0, -2, 5 \rangle$ $\vec{u} = \langle 5, 10, 15 \rangle$ $\vec{v} = \langle 9, 3, 6 \rangle$ $\vec{z} = \langle 2, -3, 0 \rangle$

3.5 Expresa el vector $\vec{u}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ y $\vec{z}$. ($\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w} + \delta\vec{x} + \gamma\vec{z}$). Usa el valor particular $\gamma = 1$.

a) $\vec{u} = \langle 1, -1, -1 \rangle$ $\vec{v} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ $\vec{w} = \langle 1, -1, 0 \rangle$ $\vec{x} = \langle -2, 1, 1 \rangle$ $\vec{z} = \langle 3, 0, -2 \rangle$

b) $\vec{u} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ $\vec{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ $\vec{w} = \langle 1, 0, 1 \rangle$ $\vec{x} = \langle -1, 2, 1 \rangle$ $\vec{z} = \langle 2, -3, 0 \rangle$

3.2 COMBINACIONES LINEALES TRIVIAL Y NULA

Dada la combinación lineal $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} + \dots$, si los escalares $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ son iguales a cero, se dice que la combinación lineal es *trivial*. Entonces, la combinación lineal:

$$0 \vec{u} + 0 \vec{v} + 0 \vec{w} + 0 \vec{x} = \vec{O}$$

es una combinación lineal trivial de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ y $\vec{x}$, cuyo resultado es el vector nulo $\vec{O}$.

Cuando se tiene una combinación lineal cuyo resultado es el vector nulo, no siempre se trata de una combinación lineal trivial. En este caso, se habla de una *combinación lineal nula*. Así, por ejemplo, la combinación lineal:

$$\frac{1}{3} \langle 3, 6, -9 \rangle - \langle 1, 2, -3 \rangle = \langle 1, 2, -3 \rangle + \langle -1, -2, 3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle = \vec{O}$$

es una combinación lineal nula, ya que los vectores $\langle 3, 6, -9 \rangle$ y $\langle 1, 2, -3 \rangle$ están multiplicados por escalares no nulos.

3.3 VECTORES LINEALMENTE DEPENDIENTES

Se dice que un conjunto de vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots, \vec{z}\}$ es *linealmente dependiente* si existen escalares $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$, no todos iguales a cero, que cumplan con la relación:

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} + \dots + \delta \vec{z} = \vec{0} \quad (3.2)$$

De la expresión anterior, podemos escribir:

$$\vec{u} = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \vec{v} + \left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right) \vec{w} + \dots + \left(-\frac{\delta}{\alpha}\right) \vec{z}$$

Si $a = -\frac{\beta}{\alpha}$, $b = -\frac{\gamma}{\alpha}, \dots, m = -\frac{\delta}{\alpha}$, tendremos:

$$\vec{u} = a \vec{v} + b \vec{w} + \dots + m \vec{z} \quad (3.3)$$

Relación que nos dice que en un conjunto de vectores linealmente dependientes, cualquiera de ellos puede ser expresado como una combinación lineal de los restantes.

En particular, para tres vectores linealmente independientes en R^3 , podemos escribir:

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} = 0 \quad (3.4)$$

Un conjunto de cuatro o más vectores en R^3 es linealmente dependiente, ya que la aplicación de (3.2) a dicho sistema conduce a un sistema que tiene más incógnitas que ecuaciones y que, por tanto, admite, además de la solución trivial, infinitas soluciones. Para comprobar esto, consideremos los vectores:

$$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad \vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \quad \vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle \quad \vec{z} = \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$$

y utilicemos (3.2):

$$\alpha \langle u_1, u_2, u_3 \rangle + \beta \langle v_1, v_2, v_3 \rangle + \gamma \langle w_1, w_2, w_3 \rangle + \delta \langle z_1, z_2, z_3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

Igualando componentes:

$$\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1 + \delta z_1 = 0$$

$$\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2 + \delta z_2 = 0$$

$$\alpha u_3 + \beta v_3 + \gamma w_3 + \delta z_3 = 0$$

El sistema anterior tiene tres ecuaciones y cuatro incógnitas y admite la solución trivial $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Tiene, además, un número infinito de soluciones que se obtienen al expresar tres incógnitas, por ejemplo, α , β y γ , en término de la otra incógnita, δ . Asignándole a δ valores reales arbitrarios, obtenemos los valores correspondientes de α , β y γ .

Las afirmaciones anteriormente nos permite decir que *el número máximo de vectores linealmente independientes en R^3 es igual a 3*.

✱ EJEMPLO 3.4

Demuestra que los vectores:

$$\vec{u} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \vec{v} = \langle -2, 1, 0 \rangle \quad \vec{w} = \langle -1, 2, 1 \rangle \quad \vec{z} = \langle 0, 2, -1 \rangle$$

forman un conjunto linealmente dependiente.

☆ Solución

Podemos escribir:

$$\alpha \langle 1, 0, 0 \rangle + \beta \langle -2, 1, 0 \rangle + \gamma \langle -1, 2, 1 \rangle + \delta \langle 0, 2, -1 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

relación que admite la solución trivial $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Además, podemos escribir:

$$\alpha - 2\beta - \gamma = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\beta + 2\gamma + 2\delta = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\gamma - \delta = 0 \quad \textcircled{3}$$

De $\textcircled{3}$: $\gamma = \delta$. Sustituyendo en $\textcircled{2}$: $\beta + 2\delta + 2\delta = 0 \Rightarrow \beta = -4\delta$

De $\textcircled{1}$: $\alpha = 2\beta + \gamma \Rightarrow \alpha = -7\delta$

Dando distintos valores a δ , podemos encontrar los valores correspondientes de α , β y γ . Así:

$$\delta = 1 \Rightarrow \alpha = -7 \quad \beta = -4 \quad \gamma = 1$$

$$\delta = -2 \Rightarrow \alpha = 14 \quad \beta = 8 \quad \gamma = -2$$

Para comprobar la validez de la primera solución, escribimos la expresión para $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} + \delta \vec{z}$:

$$\begin{aligned} & -7\langle 1, 0, 0 \rangle - 4\langle -2, 1, 0 \rangle + \langle -1, 2, 1 \rangle + \langle 0, 2, -1 \rangle = \\ & = \langle -7, 0, 0 \rangle + \langle 8, -4, 0 \rangle + \langle -1, 2, 1 \rangle + \langle 0, 2, -1 \rangle = \\ & = \langle -7 + 8 - 1 + 0, 0 - 4 + 2 + 2, 0 + 0 + 1 - 1 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle \end{aligned}$$

3.4 VECTORES LINEALMENTE INDEPENDIENTES

Se dice que un conjunto de vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots, \vec{z}\}$ es *linealmente independiente* si la combinación lineal nula, dada por:

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w} + \dots + \delta \vec{z} = 0$$

es la combinación lineal trivial. Es decir, si los únicos valores que satisfacen la relación anterior son $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \delta = 0$.

Cuando un conjunto de vectores es linealmente independiente, no es linealmente dependiente, por lo que basta demostrar una de las dos condiciones para determinar la dependencia o independencia lineal del conjunto.

✱ EJEMPLO 3.5

Determina si los vectores dados son linealmente independientes:

a) $\vec{u} = \langle 1, 2, 0 \rangle$ $\vec{v} = \langle 4, 8, 2 \rangle$ $\vec{w} = \langle 5, 10, 3 \rangle$

b) $\vec{u} = \langle 1, 2, 0 \rangle$ $\vec{v} = \langle 0, 1, -2 \rangle$ $\vec{w} = \langle 0, 2, -1 \rangle$

c) $\vec{u} = \langle 1, -5, 4 \rangle$ $\vec{v} = \langle 0, -3, 2 \rangle$

☆ Solución

a) Usando (3.4):

$$\alpha \langle 1, 2, 0 \rangle + \beta \langle 4, 8, 2 \rangle + \gamma \langle 5, 10, 3 \rangle = \mathbf{0}$$

$$\langle \alpha, 2\alpha, 0 \rangle + \langle 4\beta, 8\beta, 2\beta \rangle + \langle 5\gamma, 10\gamma, 3\gamma \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$$

Igualando componentes:

$$\begin{aligned} \alpha + 4\beta + 5\gamma &= 0 & \textcircled{1} \\ 2\alpha + 8\beta + 10\gamma &= 0 & \textcircled{2} \\ 2\beta + 3\gamma &= 0 & \textcircled{3} \end{aligned}$$

De $\textcircled{3}$: $2\beta = -3\gamma \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2}\gamma$. Sustituyendo en $\textcircled{1}$ o en $\textcircled{2}$:

$$\alpha - 6\gamma + 5\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$$

Si damos valores a γ obtenemos valores correspondientes para α y β . Así:

$$\begin{aligned} \gamma = 2 & & \alpha = 2 & & \beta = -3 \\ \gamma = -1 & & \alpha = -1 & & \beta = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Para comprobar los resultados, efectuamos la operación $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} + \gamma \vec{w}$ para la primera terna de valores:

$$\begin{aligned} & 2\langle 1, 2, 0 \rangle - 3\langle 4, 8, 2 \rangle + 2\langle 5, 10, 3 \rangle = \\ & = \langle 2, 4, 0 \rangle + \langle -12, -24, -6 \rangle + \langle 10, 20, 6 \rangle = \\ & = \langle 2 - 12 + 10, 4 - 24 + 20, 0 - 6 + 6 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle \end{aligned}$$

Como puedes ver, es posible seleccionar un número infinito de ternas que satisfacen las relaciones $\alpha = \gamma$ y $\beta = -\frac{3}{2}\gamma$. El conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es, por tanto, linealmente dependiente.

b) Podemos escribir:

$$\begin{aligned} & \alpha \langle 1, 2, 0 \rangle + \beta \langle 0, 1, -2 \rangle + \gamma \langle 0, 2, -1 \rangle = 0 \\ & \langle \alpha, 2\alpha, 0 \rangle + \langle 0, \beta, -2\beta \rangle + \langle 0, 2\gamma, -\gamma \rangle = 0 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 + 0 &= 0 & \textcircled{1} \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 & \textcircled{2} \\ 0 - 2\beta - \gamma &= 0 & \textcircled{3} \end{aligned}$$

De $\textcircled{1}$: $\alpha = 0$. De $\textcircled{2}$: $\beta = -2\gamma$. Sustituyendo en $\textcircled{3}$: $4\gamma - \gamma = 0$, de donde $\gamma = 0$. Luego de $\textcircled{3}$: $\beta = -2\gamma$, por lo que $\beta = 0$. Como $\alpha = \beta = \gamma = 0$, el conjunto de vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es linealmente independiente.

3.5 DIMENSIÓN Y BASE DEL ESPACIO VECTORIAL R^3

Se denomina *dimensión del espacio vectorial R^3* al número máximo de vectores linealmente independientes que puede tener un conjunto de ese espacio vectorial.

Ya vimos que el número máximo de vectores linealmente independientes en un conjunto de R^3 es 3 y, por tanto, su dimensión es 3.

Se denomina *base del espacio vectorial R^3* , de dimensión 3, a cualquier conjunto de 3 vectores linealmente independientes de R^3 .

De acuerdo a lo visto, sólo 3 vectores linealmente independientes en R^3 constituyen una base. Es usual representar una base en R^3 como un conjunto de la forma:

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

Una vez establecida una base en R^3 , cualquier valor puede expresarse como combinación lineal de los vectores que conforman la base. Entonces, dado el vector $\vec{u}$, podemos escribir:

$$\alpha \vec{u} + \beta \vec{e}_1 + \gamma \vec{e}_2 + \delta \vec{e}_3 = 0$$

de donde:

$$\vec{u} = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \vec{e}_1 + \left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right) \vec{e}_2 + \left(-\frac{\delta}{\alpha}\right) \vec{e}_3$$

Si hacemos $\phi = -\frac{\beta}{\alpha}$, $\lambda = -\frac{\gamma}{\alpha}$ y $\sigma = -\frac{\delta}{\alpha}$:

$$\vec{u} = \phi \vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_2 + \sigma \vec{e}_3$$

que expresa a $\vec{u}$, como combinación lineal de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, y $\vec{e}_3$. A los coeficientes ϕ , λ y σ de la combinación lineal, se les denomina *coordenadas* de $\vec{u}$ respecto a la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

3.6 BASE CANÓNICA

A los vectores $\langle 1, 0, 0 \rangle$, $\langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\langle 0, 0, 1 \rangle$ se les designa mediante las letras $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.

$$\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle \quad \vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad \vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

La representación geométrica de dichos vectores se muestra en la fig. 3.1. Cada uno de los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ tiene magnitud igual a 1 y, como puede observarse, yacen sobre los ejes X, Y y Z, respectivamente.

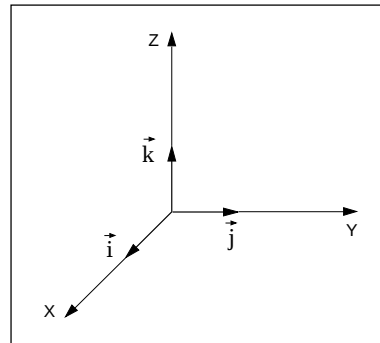


Fig. 3.1 Representación geométrica de los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$.

Podemos demostrar que los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$ forman una base en R^3 . En efecto:

$$\begin{aligned}\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} &\Rightarrow \alpha \langle 1, 0, 0 \rangle + \beta \langle 0, 1, 0 \rangle + \gamma \langle 0, 0, 1 \rangle = 0 \\ \langle \alpha, 0, 0 \rangle + \langle 0, \beta, 0 \rangle + \langle 0, 0, \gamma \rangle &= 0\end{aligned}$$

De donde $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Al conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ se le denomina *base canónica*. De acuerdo a lo anterior, cualquier vector en R^3 puede expresarse como combinación lineal de $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$. Es decir, si $\vec{u} = \langle x, y, z \rangle$, podemos escribir:

$$\begin{aligned}\langle x, y, z \rangle = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} &\Rightarrow \langle x, y, z \rangle = \alpha \langle 1, 0, 0 \rangle + \beta \langle 0, 1, 0 \rangle + \gamma \langle 0, 0, 1 \rangle \\ \langle x, y, z \rangle = \langle \alpha, 0, 0 \rangle + \langle 0, \beta, 0 \rangle + \langle 0, 0, \gamma \rangle &= 0 \Rightarrow \langle x, y, z \rangle = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle\end{aligned}$$

La relación anterior indica que las componentes del vector de posición son iguales a las coordenadas de $\vec{u}$ respecto a la base canónica:

$$x = \alpha \quad y = \beta \quad z = \gamma$$

Entonces:

$$\boxed{\langle x, y, z \rangle = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}} \quad (3.5)$$

La propiedad anterior nos permite expresar cualquier vector de R^3 como una combinación lineal de la base canónica. Así:

$$\begin{aligned}\langle 3, -2, 5 \rangle &= 3 \vec{i} - 2 \vec{j} + 5 \vec{k} \\ \langle 0, 7, -4 \rangle &= 0 \vec{i} + 7 \vec{j} - 4 \vec{k}\end{aligned}$$

La expresión de vectores mediante la base canónica facilita las operaciones algebraicas que se efectúan con vectores, ya que dichas operaciones se reducen a la suma y resta de términos semejantes. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\langle 0, 3, 5 \rangle + \langle -2, -7, -1 \rangle &= 0 \vec{i} + 3 \vec{j} + 5 \vec{k} - 2 \vec{i} - 7 \vec{j} - \vec{k} = \\ &= -2 \vec{i} - 4 \vec{j} + 4 \vec{k} = \langle -2, -4, 4 \rangle\end{aligned}$$

✱ EJEMPLO 3.6

Determina si los siguientes vectores determinan una base en R^3 y escribe el vector $\vec{z} = \langle 2, 0, -1 \rangle$ como una combinación lineal de la base.

$$\text{a)} \quad \vec{u} = \langle 2, 1, -3 \rangle \quad \vec{v} = \langle 1, 0, -4 \rangle \quad \vec{w} = \langle 4, 3, -1 \rangle$$

$$\text{b)} \quad \vec{u} = \langle 1, -1, 0 \rangle \quad \vec{v} = \langle 2, 2, 1 \rangle \quad \vec{w} = \langle 1, 0, 2 \rangle$$

☆ Solución

a) Veamos si los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes:

$$\alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k} = 0 \Rightarrow \alpha \langle 2, 1, -3 \rangle + \beta \langle 1, 0, -4 \rangle + \gamma \langle 4, 3, -1 \rangle = 0$$

Igualando componentes:

$$2\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\alpha + 3\gamma = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$-3\alpha - 4\beta - \gamma = 0 \quad \textcircled{3}$$

De $\textcircled{2}$: $\alpha = -3\gamma$

Sustituyendo en $\textcircled{1}$ o en $\textcircled{3}$: $-6\gamma + \beta + 4\gamma = 0 \Rightarrow \beta = 2\gamma$

Dando valores a γ distintos de cero, podemos obtener valores para α y β también distintos de cero. Por tanto, el conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es linealmente dependiente y no forma una base en R^3 .

b) Tenemos:

$$\alpha \langle 1, -1, 0 \rangle + \beta \langle 2, 2, 1 \rangle + \gamma \langle 1, 0, 2 \rangle = 0$$

De donde:

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$-\alpha + 2\beta = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\beta + 2\gamma = 0 \quad \textcircled{3}$$

Haciendo operaciones se obtiene: $\alpha = \beta = \gamma = 0$ y, por tanto, el conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ es linealmente independiente y forma una base en $\mathbb{R}^3$. El vector $\vec{z}$ puede expresarse como:

$$\langle 2, 0, 1 \rangle = \alpha \langle 1, -1, 0 \rangle + \beta \langle 2, 2, 1 \rangle + \gamma \langle 1, 0, 2 \rangle$$

$$\langle 2, 0, 1 \rangle = \langle \alpha, -\alpha, 0 \rangle + \langle 2\beta, 2\beta, \beta \rangle + \langle \gamma, 0, 2\gamma \rangle$$

Igualando componentes:

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma &= 2 \\ -\alpha + 2\beta &= 0 \\ \beta + 2\gamma &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $\alpha = \frac{6}{7}$, $\beta = \frac{3}{7}$, $\gamma = \frac{2}{7}$ y podemos escribir:

$$\vec{z} = \frac{6}{7} \vec{u} + \frac{3}{7} \vec{v} + \frac{2}{7} \vec{w}$$

* Ejercicios

3.6 Determina si los siguientes vectores son linealmente independientes:

a) $\vec{u} = \langle 2, 1, -3 \rangle$ $\vec{v} = \langle -1, 0, 4 \rangle$ $\vec{w} = \langle 4, 3, -1 \rangle$

b) $\vec{u} = \langle 0, 1, 2 \rangle$ $\vec{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ $\vec{w} = \langle -2, 0, 1 \rangle$

c) $\vec{u} = \langle 1, 5, 1 \rangle$ $\vec{v} = \langle -1, 0, 1 \rangle$ $\vec{w} = \langle 2, 5, 0 \rangle$

d) $\vec{u} = \langle 3, 2, 1 \rangle$ $\vec{v} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ $\vec{w} = \langle -2, 0, 1 \rangle$

3.7 Di si los vectores dados forman una base en $\mathbb{R}^3$. Justifica tu respuesta.

a) $\vec{u} = \langle 5, 0, -4 \rangle$ $\vec{v} = \langle -10, 1, 4 \rangle$

b) $\vec{u} = \langle -6, 3, 0 \rangle$ $\vec{v} = \langle -4, 3, 0 \rangle$ $\vec{w} = \langle 0, 0, 2 \rangle$

c) $\vec{u} = \langle 5, 1, 0 \rangle$ $\vec{v} = \langle -3, 3, 6 \rangle$ $\vec{w} = \langle 7, 0, 2 \rangle$

$$\text{d)} \quad \vec{u} = \langle 1, 3, 4 \rangle \quad \vec{v} = \langle -2, 0, 0 \rangle \quad \vec{w} = \langle 0, 5, 0 \rangle$$

En caso afirmativo, expresa el vector $\vec{z} = \langle 3, 0, -2 \rangle$ como una combinación lineal de los elementos de la base.

3.8 Expresa los siguientes vectores como combinación lineal de la base canónica:

$$\text{a)} \quad \vec{u} = \langle 3, -10, 4 \rangle \quad \text{b)} \quad \vec{v} = \langle 0, -5, -3 \rangle$$

$$\text{c)} \quad \vec{w} = \langle -4, 0, 0 \rangle \quad \text{d)} \quad \vec{z} = \langle -8, 6, 0 \rangle$$

3.7 PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

Dados los vectores en R^3 :

$$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad \vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

el producto escalar o producto interno de los mismos, representado por $\vec{u} \cdot \vec{v}$, se define como:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (3.6)$$

El producto interno es una cantidad escalar y se obtiene sumando los productos de las componentes correspondientes. Para indagar sobre el significado del producto escalar, consideremos la operación:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \cdot \langle u_1, u_2, u_3 \rangle = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (3.7)$$

Como sabemos de la relación (1.10), la magnitud o norma de un vector está dada por:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Comparando las dos relaciones anteriores, vemos que el producto escalar de un vector por sí mismo es igual al cuadrado de la magnitud del vector. Es decir:

$$|\vec{u}|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} \quad (3.8)$$

✱ EJEMPLO 3.7

Dados los vectores $\vec{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 5, 10, 8 \rangle$, determina: **a)** El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$. **b)** Las magnitudes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

★ Solución

$$\mathbf{a)} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \langle 3, -2, 1 \rangle \cdot \langle 5, 10, 8 \rangle = 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 10 + 1 \cdot 8 = 15 - 20 + 8 = 3$$

$$\mathbf{b)} \quad u = |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1} = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$$

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{5 \cdot 5 + 10 \cdot 10 + 8 \cdot 8} = \sqrt{25 + 100 + 64} = \sqrt{189}$$

3.8 FORMA GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO ESCALAR

Considera los vectores de posición $\vec{u} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$, que se muestran en la fig. 3.2. El ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es α . Vamos a deducir otra expresión para el producto escalar que envuelve las magnitudes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y el ángulo comprendido entre los mismos.

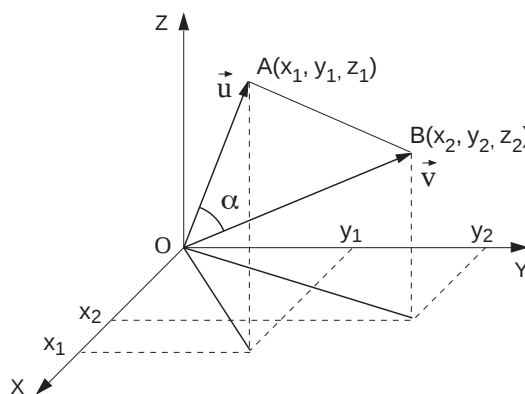


Fig. 3.2 Diagrama para obtener la forma geométrica del producto escalar.

El teorema del coseno permite escribir:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos \alpha$$

La distancia AB puede ser calculada como:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Las magnitudes de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ corresponden a las distancias OA y OB :

$$OA = u = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$OB = v = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \right)^2 &= \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \right)^2 + \left(\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \right)^2 + \\ &\quad - 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cos \alpha = \\ x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2 &= \\ = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cos \alpha \\ - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) &= -2\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cos \alpha \\ x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cos \alpha \end{aligned}$$

Por definición: $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Además:

$$|\vec{u}| = u = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

Sustituyendo estos valores en la expresión anterior:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cos \alpha$$

$$0 \leq \alpha \leq \pi \quad (3.9)$$

relación que nos dice que el producto escalar de dos vectores es igual al producto de sus magnitudes por el coseno del ángulo comprendido entre ellos.

La relación (3.9) nos permite determinar el ángulo entre dos vectores usando:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{u \cdot v} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{u \cdot v} \right) \quad 0 \leq \alpha \leq \pi$$

✱ EJEMPLO 3.8

- a) Determina el ángulo entre los vectores $\vec{u} = \langle 1, 5, -2 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 4, -2, 4 \rangle$.
- b) ¿Para qué valores de a los vectores $\vec{u} = \langle a, -2, 1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 2a, a, -4 \rangle$ son perpendiculares?

☆ Solución

a) Tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{\langle 1, 5, -2 \rangle \cdot \langle 4, -2, 4 \rangle}{\sqrt{1+25+4} \cdot \sqrt{16+4+16}} = \frac{4-10-8}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{36}} = -\frac{14}{32,86} = -0,426$$

$$\alpha = \cos^{-1}(-0,426) = 115,22^\circ$$

b) Si los dos vectores son perpendiculares, $\alpha = 90^\circ$ y $\cos \alpha = 0$. Por tanto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cos \alpha = 0 \Rightarrow \langle a, -2, 1 \rangle \cdot \langle 2a, a, -4 \rangle = 0$$

$$2a^2 - 2a - 4 = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

Resolviendo, obtenemos: $a = 2$ o $a = -1$.

3.9 PROPIEDADES DEL PRODUCTO ESCALAR

Las siguientes propiedades son válidas para el producto escalar de vectores:

a) *Propiedad conmutativa:* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

b) *Propiedad distributiva:* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

c) *Multiplicación por un escalar:* $m(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (m\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (m\vec{v})$

d) Para los vectores unitarios $\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ se cumple:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

e) Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{u}, \vec{v}$ son vectores no nulos, entonces $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares:

✱ EJEMPLO 3.9

Determina los ángulos que el vector $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$ forma con los ejes coordenados X, Y y Z .

☆ Solución

En la fig. 3.3 se muestra el vector $\vec{u}$. Para determinar los ángulos que $\vec{u}$ forma con los ejes coordenados, basta con determinar los ángulos con los vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$. Para el eje X :

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = u i \cos \alpha$$

$$\langle 2, 3, 5 \rangle \cdot \langle 1, 0, 0 \rangle = \sqrt{2^2 + 3^2 + 5^2} \cdot 1 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{38}} = 0,324 \quad \alpha = 71,07^\circ$$

Para el eje Y :

$$\vec{u} \cdot \vec{j} = u j \cos \beta$$

$$\langle 2, 3, 5 \rangle \cdot \langle 0, 1, 0 \rangle = \sqrt{38} \cdot 1 \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{3}{\sqrt{38}} = 0,487 \quad \beta = 60,88^\circ$$

Para el eje Z :

$$\vec{u} \cdot \vec{k} = u k \cos \gamma$$

$$\langle 2, 3, 5 \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle = \sqrt{38} \cdot 1 \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{5}{\sqrt{38}} = 0,811 \quad \gamma = 35,80^\circ$$

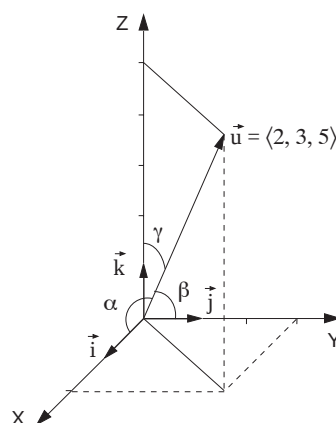


Fig. 3.3 Ángulos que forma el vector $\vec{u}$ con los ejes coordenados. Ejemplo 3.9.

* Ejercicios

3.9 Dados los vectores $\vec{u} = \langle -2, 3, 1 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 5, -4, 6 \rangle$, determine: **a)** El producto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$. **b)** Las magnitudes u y v .

3.10 Determina el ángulo entre los siguientes vectores:

$$\text{a) } \vec{u} = \langle 1, 4, -3 \rangle \quad \vec{v} = \langle 0, -2, 5 \rangle \quad \text{b) } \vec{u} = 3\vec{j} + 2\vec{k} \quad \vec{v} = -\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}$$

3.11 ¿Para qué valores de x los vectores son perpendiculares?

$$\text{a) } \vec{u} = \langle 2, x, 1 \rangle \quad \vec{v} = \langle 4, -2, -2 \rangle \quad \text{b) } \vec{u} = \langle x, 0, -1 \rangle$$

$$\vec{v} = \langle 1, x, 3 \rangle$$

3.12 Determina el valor de x para que el producto escalar tenga el valor indicado:

$$\text{a) } \vec{u} = \langle 1, -5, x \rangle \quad \vec{v} = \langle 4, 2, 7 \rangle \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 15$$

$$\text{b) } \vec{u} = \langle 6, 3 - x, 1 \rangle \quad \vec{v} = \langle 4, x, 5 \rangle \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 11$$

3.13 Determina los ángulos que los vectores forman con los ejes coordenados:

$$\text{a) } \vec{u} = \langle -1, 7, 3 \rangle \quad \text{b) } \vec{v} = \langle -3, 4, 7 \rangle \quad \text{c) } \vec{w} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$$

3.14 ¿Son los siguientes vectores perpendiculares?

$$\text{a) } \vec{u} = \langle 4, 8, -2 \rangle \quad \vec{v} = \langle 6, -2, 4 \rangle \quad \text{b) } \vec{u} = \langle 2, 3, -1 \rangle \quad \vec{v} = \langle 3, -2, 1 \rangle$$

3.15 Demuestra las propiedades conmutativa, distributiva y de multiplicación por un escalar del producto interno de vectores.

3.16 Demuestra las propiedades (d) y (e) presentadas en la sección 3.9 para el producto escalar de vectores.

MATRICES

4.1 MATRICES. DEFINICIONES.

Una matriz es un arreglo rectangular de números que usualmente se representa como:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A los números $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots$ se les conoce con el nombre de *elementos* de la matriz. Una matriz está organizada en *filas* y *columnas*. En la matriz de la relación (4.1) los elementos $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \dots$ forman una fila, mientras que los elementos $a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}, \dots$ forman una columna. La matriz dada por (4.1) tiene m filas y n columnas y se dice que es una matriz de orden $m \times n$.

La relación (4.1) es una forma generalizada para representar una matriz. Ejemplos más concretos son:

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Consideremos primero la matriz M_1 . Se trata de una matriz de 3 filas y 4 columnas ($m = 3, n = 4$) y, por tanto, se dice que es una matriz de orden 3×4 . Las filas y columnas de M_1 son:

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Fila 1} \\ \leftarrow \text{Fila 2} \\ \leftarrow \text{Fila 3} \end{array} \quad M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \text{Col. 1} \quad \text{Col. 2} \quad \text{Col. 3} \quad \text{Col. 4} \end{array}$$

La ubicación de cada elemento en la matriz M_1 está indicada por el subíndice del mismo. Así, el elemento a_{23} ocupa la fila 2 y la columna 3. Más gráficamente tendríamos:

$$M_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Elemento de la primera fila
y de la segunda columna

a_{23} { El subíndice 2 indica la fila
El subíndice 3 indica la columna

Elemento de la tercera fila
y de la primera columna

La matriz M_2 , mostrada en la página anterior, es también una matriz 3×4 (3 filas y 4 columnas) formada por números reales. Sus elementos pueden ser identificados de acuerdo con la ubicación en la matriz. Por ejemplo, podemos decir:

$$a_{11} = 1 \quad a_{31} = -7 \quad a_{23} = 4 \quad a_{34} = 8$$

Nuevamente, cada elemento de M_2 puede identificarse con un subíndice que indica la fila (primer subíndice) y la columna (segundo subíndice):

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \\ -7 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$a_{12} = 0$

$a_{33} = 1$

En general, para la matriz A dada por (4.1), a_{ij} representa al elemento de la fila i y de la columna j . Es usual representar a una matriz $m \times n$ cualquiera de la forma siguiente:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Cuando $m = n$, es decir, cuando el número de filas es igual al número de columnas, se dice que la matriz es *cuadrada de orden n* . Por ejemplo, son matrices cuadradas las siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$$

Diagonal principal Diagonal principal

M es una matriz cuadrada de orden 3 y N es una matriz cuadrada de orden 2. Los elementos a_{11} , a_{22} y a_{33} forman la *diagonal principal* de M y los elementos 3 y 7 forman la diagonal principal de N .

A una matriz que tiene una sola fila se le conoce como *matriz fila*. Ejemplos de matrices fila son:

$$F_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}] \quad F_2 = [1 \quad -8 \quad 4]$$

A una matriz que tiene una sola columna se le conoce como *matriz columna*. Ejemplos de matrices columna son:

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se llama *matriz nula* a aquella cuyos elementos son todos iguales a cero. La matriz nula $m \times n$ se representa en la forma:

$$[O]_{m \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Una *matriz diagonal* es una matriz cuadrada que tiene todos sus elementos iguales a cero con excepción de los de la diagonal principal. Como ejemplos tenemos:

$$D_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \quad D_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Una *matriz unidad* o *matriz identidad* es una matriz diagonal que tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1. Como ejemplo citamos:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si A es una matriz cualquiera, la *transpuesta* de A , denotada por A^t , es la matriz cuya primera fila es la primera columna de A , cuya segunda fila es la segunda columna de A y así sucesivamente. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

4.2 IGUALDAD DE MATRICES

Dos matrices, A y B , son iguales si son del mismo orden y sus elementos son idénticos. Es decir, si:

$$a_{ij} = b_{ij}$$

donde a_{ij} es el elemento de la fila i y la columna j de A y b_{ij} es el elemento de la fila i y la columna j de B . Entonces, se debe cumplir:

$$\text{Si } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} = b_{11} & a_{12} = b_{12} \\ a_{21} = b_{21} & a_{22} = b_{22} \end{matrix}$$

✱ EJEMPLO 4.1

Determina el valor de x , y y z si:

$$\begin{bmatrix} 3x-1 & xy \\ y^2 & z-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

☆ Solución

Si las dos matrices son iguales, se debe cumplir:

$$3x - 1 = 8 \Rightarrow x = 3 \quad xy = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{x} \Rightarrow y = 2$$

$$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2 \quad z - x = -1 \Rightarrow z = x - 1 \Rightarrow z = 2$$

El valor $y = -2$ hay que despreciarlo, ya que no permite que la igualdad de matrices se cumpla, puesto que contradice el valor dado para y por la relación $xy = 6$.

* Ejercicios

4.1 Da ejemplos de matrices de orden:

a) 3×4

b) 5×5

c) 1×4

d) 3×1

4.2 Establece el orden de las siguientes matrices y determina su transpuesta:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ 0 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } C = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 8 & -7 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

4.3 Determina el valor de x , y y z en las siguientes igualdades:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3x \\ 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -2x - 3y \\ 3x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} y^2 - 1 & 3 \\ x - y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.3 ADICIÓN DE MATRICES

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son ambas matrices $m \times n$, la adición $A + B$ es una matriz $C = [c_{ij}]$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Es decir, para sumar dos matrices A y B es necesario que ambas tengan igual orden y el resultado de la adición se obtiene sumando los elementos correspondientes de dichas matrices.

* EJEMPLO 4.2

Determina la suma de las matrices A y B .

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

☆ **Solución**

$$\text{a)} \quad A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \quad A + B = \begin{bmatrix} 1-2 & -3+4 \\ 0+3 & 2+0 \\ 6+0 & 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

La suma de cualquier matriz A con la matriz nula $[O]$ es igual a la misma matriz A . Así:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 6 & x \end{bmatrix}$$

Por definición, la *matriz opuesta de A* , denotada por $-A$ es una matriz del mismo orden de A y tal que:

$$A + (-A) = [O]$$

La matriz $-A$ se obtiene multiplicando por -1 todos los elementos de A . Por ejemplo, si:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & -5 \\ -4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad -A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -6 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} -3+3 & 5-5 & 2-2 \\ 6-6 & 0+0 & -5+5 \\ -4+4 & 3-3 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [O]$$

4.4 PROPIEDADES DE LA ADICIÓN DE MATRICES

Muchas de las propiedades en las operaciones con números reales son válidas para las operaciones con matrices. Sin embargo, hay diferencias notables entre matrices y números reales cuando se trata de multiplicación de matrices, como veremos posteriormente. A continuación exploramos las propiedades de la adición de matrices.

4.4.1. *Propiedad conmutativa*: si A y B son matrices de orden $m \times n$, luego:

$$A + B = B + A \quad (4.3)$$

Demostración: Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Las sumas $A + B$ y $B + A$ podemos expresarlas como:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = C = [c_{ij}] \quad (4.4)$$

$$B + A = [b_{ij}] + [a_{ij}] = D = [d_{ij}] \quad (4.5)$$

Es decir, cada elemento de C , c_{ij} , es igual a la suma de los elementos de A , a_{ij} y B , b_{ij} . De (4.4):

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Igualmente, de (4.5):

$$d_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

Como a_{ij} y b_{ij} son números reales:

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

lo que implica que $c_{ij} = d_{ij}$ y, por tanto:

$$C = D \Rightarrow A + B = B + A$$

✱ EJEMPLO 4.3

Demuestra que $A + B = B + A$ si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

☆ **Solución**

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

4.4.2. Propiedad asociativa: Si A , B y C son matrices $m \times n$, se cumple:

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (4.6)$$

Demostración: Sean $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ y $C = [c_{ij}]$. Se tiene:

$$A + (B + C) = [a_{ij}] + \{[b_{ij}] + [c_{ij}]\} = [a_{ij}] + [d_{ij}] = M = [m_{ij}] \quad (4.7)$$

$$(A + B) + C = \{[a_{ij}] + [b_{ij}]\} + [c_{ij}] = [e_{ij}] + [c_{ij}] = N = [n_{ij}] \quad (4.8)$$

De la relación (4.7), podemos escribir:

$$a_{ij} + \{b_{ij} + c_{ij}\} = m_{ij} \Rightarrow \{a_{ij} + b_{ij}\} + c_{ij} = m_{ij} \text{ (Por ser números reales)} \quad (4.9)$$

De la relación (4.8):

$$n_{ij} = \{a_{ij} + b_{ij}\} + c_{ij} \quad (4.10)$$

Como (4.9) y (4.10) son las mismas relaciones, la relación (4.6) es válida.

4.5 MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de orden $m \times n$ y α es un número real, el producto αA es otra matriz B de orden $m \times n$ tal que:

$$B = \alpha A \Rightarrow [b_{ij}] = \alpha [a_{ij}]$$

donde:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \quad (4.11)$$

Es decir, la matriz B se obtiene multiplicando cada elemento de A por el escalar α .

✱ EJEMPLO 4.4

Determina el resultado αA si:

$$\alpha = -2 \quad A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

☆ Solución

Se tiene:

$$\alpha A = -2 \cdot \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot (-5) & (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 4 \\ (-2) \cdot 3 & (-2) \cdot (-2) & (-2) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -2 & -8 \\ -6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

4.6 SUSTRACCIÓN DE MATRICES

Dadas las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, la diferencia $A - B$ se obtiene sumando a la matriz A la opuesta a de la matriz B . Es decir:

$$A - B = A + (-B) = [a_{ij}] + [-b_{ij}] \quad (4.12)$$

✱ EJEMPLO 4.5

Determina $A - B$ si:

$$A = \begin{bmatrix} 2x & y \\ 0 & 3 \\ y & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2y \\ x & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

☆ Solución

La matriz $-B$ está dada por: $-B = \begin{bmatrix} 3 & 2y \\ -x & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

Luego:

$$A - B = A + (-B) = \begin{bmatrix} 2x & y \\ 0 & 3 \\ y & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2y \\ -x & -2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3 & 3y \\ -x & 1 \\ y-5 & 3 \end{bmatrix}$$

4.7 MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

Definiremos primero el producto de una matriz fila de orden $1 \times n$ por una matriz columna de orden $n \times 1$. Tomemos:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n] \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

El producto AB se define como:

$$AB = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n] \quad (4.13)$$

El producto anterior es posible sólo si el número de elementos de la matriz fila es igual al número de elementos de la matriz columna. Como el resultado dado por (4.13) es una suma de productos, la matriz AB tiene un solo elemento. Nota cómo se forma la matriz AB : el primer elemento de A se multiplica por el primer elemento de B , el segundo elemento de A por el segundo de B y así sucesivamente. Luego, estos productos se suman.

✱ EJEMPLO 4.6

Determina AB si:

$$A = [2 \quad -1 \quad -3 \quad 4] \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

★ **Solución**

$$\begin{aligned} AB &= [2 \quad -1 \quad -3 \quad 4] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} = [2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot (-2)] = \\ &= [-8] \end{aligned}$$

Consideremos ahora dos matrices A y B de órdenes $m \times n$ y $n \times p$, respectivamente.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

El producto AB es una matriz de orden $m \times p$ donde cada elemento en una fila y columna dados de AB es el producto de esa fila de A y esa columna de B . Para ilustrar esta definición, tomemos matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

El producto AB está dado por:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{bmatrix}$$

Como puedes ver, el número de filas de AB (3) es igual al número de filas de A y el número de columnas de AB (2) es igual al número de columnas de B .

Gráficamente podemos visualizar el proceso de formación de las filas de AB como si se tratase de la multiplicación de varias matrices filas por varias matrices columnas.

$$\begin{array}{lcl} \text{Primera fila} \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} & \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} \\ \text{Segunda fila} \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} & \left[\begin{array}{ccc} a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} \\ \text{Tercera fila} \rightarrow & \left[\begin{array}{ccc} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} & \left[\begin{array}{ccc} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} \end{array}$$

El producto AB de dos matrices es sólo posible si el número de columnas de A es igual al número de filas de B .

✱ EJEMPLO 4.7

Efectúa la multiplicación de las siguientes matrices:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución

a) La matriz A es una matriz 2×2 , al igual que la matriz B . Como el número de columnas de A es igual al número de filas de B , la multiplicación AB es posible. El resultado es una matriz de orden 2×2 .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5-4 & 10-3 \\ 3-8 & 6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 13 \\ -5 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b) La matriz A es una matriz 3×2 , la matriz B es una matriz de orden 2×2 . El producto AB es posible porque el número de columnas de A es igual al número de filas de B . El resultado es una matriz de orden 3×2 :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) & 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 \\ 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \\ 5 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -7 & 11 \\ -11 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c) El número de columnas de A , 2, no es igual al número de filas de B y, por tanto, la multiplicación AB no es posible.

4.8 PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES.

En la multiplicación de matrices vamos a considerar las siguientes propiedades:

4.8.1 *Multiplicación por la matriz identidad:* dada una matriz identidad I , de orden $n \times n$, y otra matriz A , de orden $n \times n$, se cumple:

$$A \cdot I = I \cdot A = A \quad (4.14)$$

✱ EJEMPLO 4.8

Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

verifica que $A \cdot I = A$.

☆ Solución

$$\begin{aligned} A \cdot I &= \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = A \end{aligned}$$

4.8.2 *Propiedad asociativa:* si A es una matriz $m \times n$, B una matriz $n \times p$ y C una matriz $p \times q$, entonces:

$$(AB)C = A(BC) \quad (4.15)$$

✱ EJEMPLO 4.9

Verifica la relación (4.15) para las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

☆ Solución

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 \\ 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -5 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -5 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 - 9 - 10 & 9 + 0 - 20 \\ 3 + 18 + 24 & -9 + 0 + 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & -11 \\ 45 & 39 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + 3 + 6 & 3 + 0 + 12 \\ 1 + 6 + 8 & -3 + 0 + 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 15 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 15 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 - 30 & 15 - 26 \\ 0 + 45 & 0 + 39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22 & -11 \\ 45 & 39 \end{bmatrix}$$

Lo que verifica la relación (4.15).

4.8.3 Propiedad distributiva respecto a la adición: si A y B son matrices de orden $m \times n$ y C es una matriz de orden $n \times p$, entonces:

$$(A + B)C = AC + BC \quad (4.16)$$

✱ EJEMPLO 4.10

Verifica la relación (4.16) para las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

★ Solución

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-4+3 & 6+2+0 \\ 9+0+1 & 6+0+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-4+3 & 4+2+0 \\ 3+6+2 & 2-3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 11 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+0+0 & 2+0+0 \\ 6-6-1 & 4+3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 11 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 10 & 6 \end{bmatrix}$$

Lo que verifica la relación (4.16) para las matrices A , B y C .

4.8.4 Propiedad conmutativa: si A es una matriz de orden $m \times n$ y B una matriz de orden $n \times p$, podemos encontrar las siguientes situaciones:

a) El producto puede no estar definido. Esto sucede si $p \neq n$. Por ejemplo, si:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El producto AB está definido, mientras que BA , dado por:

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

no puede efectuarse porque el número de columnas de A no es igual al número de filas de B .

b) Si el producto BA está definido, BA y AB serán matrices $n \times n$ y $m \times m$, respectivamente, y si $m \neq n$, AB y BA son de diferentes órdenes. Por ejemplo, si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Los productos AB y BA son:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2 \\ 2+6+12 & -3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 20 & 5 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 7 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

Es decir, AB es una matriz 2×2 , mientras que BA es una matriz 3×3 . Puedes también notar que $AB \neq BA$.

c) Si AB y BA tienen el mismo orden, generalmente el resultado de estos productos son diferentes. Si:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se tiene:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como puedes ver, los resultados son matrices de orden 2×2 , pero distintos.

De los tres casos anteriores, podemos concluir que *la multiplicación de matrices no cumple con la propiedad conmutativa*.

* Ejercicios

4.4 Da un ejemplo de una matriz:

a) 2×3

b) 1×5

c) 4×1

d) 4×4

4.5 Di cuál es el orden de las siguientes matrices y determina la matriz transpuesta:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$ **c)** $C = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -5 & 8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

4.6 Determina x , y y z en las siguientes relaciones:

a) $\begin{bmatrix} 2x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2 \\ 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} x-1 & y \\ 4 & z-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & x \\ y & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3y \\ z & 5 & -3 \\ z & 3 & 2 \end{bmatrix}$

4.7 Determina las sumas indicadas cuando sea posible:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -10 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 3,2 & 5 & -3 \\ 0 & 4,2 & 1,5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,7 & -3 & 2,6 \\ 1,6 & 0,8 & -0,5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & -6 & 10 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -5 \\ -3 & 8 & 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 & -5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

4.8 Determina $A - B$ si:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ **b)** $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

$$\text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x & y \\ y & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ x & -2 \\ x & y \end{bmatrix} \quad \text{d) } A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.9 Determina los siguientes productos:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \\ -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{f) } \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{h) } \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

4.10 Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -5 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

determina, cuando sea posible:

- a)** $C + E$ **b)** AB y BA **c)** $2C - 3E$ **d)** $CB + D$
e) $AB + DD$ **f)** $A(BD)$ y $(AB)D$ **g)** $A(C + E)$ y $AC + AE$
h) $3A + 2A$ y $5A$ **i)** A^T **j)** $(A^T)^T$ **k)** $B^T A^T$ **l)** $(C + E)^T$ y $C^T + E^T$

4.11 Determina la matriz X que satisface las siguientes relaciones:

$$\text{a) } 3X + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{b) } X + 2I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - X = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^t \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^t - \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^t + X$$

4.12 Determina a, b, c y d si:

$$\begin{bmatrix} a+b & c+d \\ c-b & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$$

4.13 Comprueba que el sistema de ecuaciones:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

puede escribirse en la forma: $AX = B$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

4.14 Calcula los siguientes productos:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4.15 Expresa los siguientes sistemas de ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{array}{ll} 2x - y + 3z = 0 & x + y = 0 \\ \text{a) } x + 5y - 2z = 1 & \text{b) } -2x + 3z = 3 \\ 3x - 6y + z = -2 & x - 3y + 3z = 1 \end{array}$$

4.9 OPERACIONES ELEMENTALES DE FILAS Y COLUMNAS EN UNA MATRIZ

Por operaciones elementales de filas y columnas de una matriz A se entienden las siguientes:

1. El intercambio de filas y columnas de A .
2. La multiplicación de una fila o una columna por un número $c \neq 0$.
3. Multiplicación de una fila o columna por un número c y suma del resultado a otra fila o columna, respectivamente.

Una matriz A $m \times n$ se dice que es equivalente *por filas* a una matriz B $m \times n$ si la matriz B se obtiene a partir de A mediante una secuencia finita de *operaciones elementales por filas*.

Una matriz A $m \times n$ se dice que es equivalente *por columnas* a una matriz B $m \times n$ si la matriz B se obtiene a partir de A mediante una secuencia finita de *operaciones elementales por columnas*.

Las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 6 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

son equivalentes por filas, ya que la segunda fila de B se obtiene multiplicando la fila 1 de A por 2 y sumándole el resultado a la segunda fila de A . Las filas 1 y 3 de B se obtienen intercambiando las filas 1 y 3 de A .

✱ EJEMPLO 4.11

Efectuando operaciones elementales sobre la matriz A conviértela en la matriz equivalente B .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

★ Solución

Los siguientes pasos indican sólo un modo de proceder. Otras alternativas también son posibles.

Paso 1: Multiplicamos la fila 3 por 2 y sumamos el resultado a la primera fila.

$$\begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Multiplicamos la primera columna por 3 y el resultado lo sumamos a la segunda columna.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Dividimos la segunda columna por 5.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4: Multiplicamos la fila 1 por -1 y el resultado lo sumamos a la fila 3.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 5: Multiplicamos la fila 1 por $2/3$ y el resultado lo sumamos a la fila 2.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 6: A la fila 3 le sumamos la fila 2.

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 7: Dividimos la fila 1 por -3 para obtener la matriz B .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.10 INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

Si A es una matriz cuadrada de orden n , se define la matriz inversa de A , denotada por A^{-1} , a aquella que hace que se verifique la relación:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \quad (4.17)$$

donde I_n es una matriz identidad, también de orden n .

En relación con la matriz inversa hay que puntualizar lo siguiente:

- a) El símbolo A^{-1} no debe interpretarse como $1/A$, es simplemente la manera de denotar la matriz inversa.
- b) No toda matriz cuadrada tiene una inversa y si la matriz inversa existe, es única.

✱ EJEMPLO 4.12

Demuestra que la matriz B es la inversa de A si:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

☆ Solución

Si multiplicamos A por B , obtenemos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+3 & 3-3 \\ -2+2 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $AB = I$, B es la inversa de A .

Hay varios métodos para obtener la matriz inversa. A fin de ilustrar uno de estos procedimientos, consideremos el caso de una matriz 2×2 . De acuerdo a (4.17), si B es la matriz inversa de A dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

se debe cumplir:

$$AB = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde a, b, c y d son cantidades conocidas y w, x, y y z deben determinarse.

Efectuando la multiplicación de matrices:

$$\begin{bmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$\begin{cases} aw + by = 1 \\ cw + dy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + bz = 0 \\ cx + dz = 1 \end{cases}$$

De los dos sistemas de ecuaciones anteriores se obtiene:

$$w = \frac{d}{ad - bc} \quad y = \frac{-c}{ad - bc} \quad x = \frac{-b}{ad - bc} \quad z = \frac{a}{ad - bc} \quad (4.18)$$

Observa que en el denominador de w, x, y y z aparece siempre la expresión $ad - bc$. Llamaremos a $\Delta = ad - bc$. La matriz inversa puede expresarse como:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}{\Delta}$$

Del resultado anterior, vemos que la matriz inversa B existe sólo si $\Delta = ad - bc \neq 0$.

✱ EJEMPLO 4.13

Determina, si existe, la inversa de la matriz dada:

$$\mathbf{a)} \ A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b)} \ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

★ **Solución**

a) Tenemos:

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -6w + 2y & -6x + 2z \\ 2w + 5y & 2x + 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$\begin{array}{ll} -6w + 2y = 1 & \textcircled{1} \\ \mathbf{(a)} \quad 2w + 5y = 0 & \textcircled{2} \end{array} \quad \begin{array}{ll} -6x + 2z = 0 & \textcircled{3} \\ \mathbf{(b)} \quad 2x + 5z = 1 & \textcircled{4} \end{array}$$

En el sistema (a) multiplicamos ② por 3 y sumamos la ecuación ①:

$$(a) \quad \begin{array}{r} -6w + 2y = 1 \\ 6w + 15y = 0 \\ \hline 17y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{17} \end{array}$$

$$\text{De ②:} \quad w = -\frac{5y}{2} \Rightarrow w = -\frac{5}{34}$$

En el sistema (b) multiplicamos ④ por 3 y sumamos la ecuación ③:

$$(b) \quad \begin{array}{r} -6x + 2z = 0 \\ 6x + 15z = 3 \\ \hline 17z = 3 \Rightarrow z = \frac{3}{17} \end{array}$$

$$\text{De ③:} \quad x = \frac{1}{3}z \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{17} \Rightarrow x = \frac{1}{17}$$

Finalmente:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{34} & \frac{1}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{3}{17} \end{bmatrix}$$

b) Para este caso usaremos las relaciones (4.18) deducidas anteriormente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 1, b = 1, c = 1, d = 1$$

Si calculamos Δ , obtenemos:

$$\Delta = ad - bc = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

Como $\Delta = 0$, la matriz inversa no existe.

El procedimiento anterior para determinar la matriz inversa puede extenderse a matrices cuadradas de orden superior a 2; sin embargo, a medida

que aumenta el orden de la matriz, el número de ecuaciones también se incrementa considerablemente. A continuación describimos otro método que permite determinar la matriz inversa. El procedimiento a seguir para hallar la matriz inversa B de una matriz A es el siguiente:

1. Forma la matriz inversa de orden $n \times 2n$ dada por:

$$\left[A \ : \ I \right]$$

en la cual las primeras n columnas son las columnas de A y las últimas n columnas son las columnas de la matriz identidad I_n .

2. Usa *operaciones elementales por filas* para reducir la matriz anterior a la forma:

$$\left[I \ : \ B \right]$$

de manera que las primeras n columnas sean las columnas de I_n .

3. Si aparecen columnas o filas de ceros en la parte de la matriz situada a la izquierda de la barra vertical ($:$), la matriz no admite inversa.

4. Si la matriz tiene inversa, ésta estará dada por la matriz B que aparece a la derecha de la barra vertical ($:$):

$$B = A^{-1}$$

✱ EJEMPLO 4.14

Determina la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

☆ Solución

Formamos la matriz $[A : I]$: $[A : I] = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1) Para colocar un 1 en la primera fila y primera columna, posición (1, 1), intercambiamos las filas 1 y 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Para obtener un cero en la posición (2, 1), multiplicamos la primera fila por 2 y se la restamos a la segunda.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & : & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3) Como necesitamos un cero en la posición (1, 2), le sumamos la fila 3 a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & : & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & : & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) Para colocar un 1 en la posición (3, 3), le restamos la fila 2 a la fila 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & : & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & : & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

5) Para obtener un cero en la posición (2, 3), le restamos la fila 3 a la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & : & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & : & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

6) Para obtener un cero en la posición (3, 2), le restamos la fila 2 a la fila 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & : & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

7) Para obtener un uno en la posición (2, 2), multiplicamos la segunda fila por -1 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

8) Para obtener un cero en la posición (1, 3), le restamos la fila 3 a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -1 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa A^{-1} es entonces:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

✱ EJEMPLO 4.15

Determina la matriz inversa de A y comprueba el resultado:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -5 \end{bmatrix}$$

☆ **Solución**

La matriz $[A : I]$ es:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & -5 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Intercambiamos las filas 1 y 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & -5 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2) Multiplicamos la fila 1 por 3 y se la restamos a la fila 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Le restamos la fila 3 a la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & : & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Mutiplicamos la fila 3 por 2 y le sumamos el resultado a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & : & 0 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & : & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

5) Multiplicamos la fila 2 por $3/2$ y el resultado se lo sumamos a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & : & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

6) Dividimos la fila 2 por -2 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & : & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & : & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Para comprobar el resultado, efectuamos el producto $A \cdot A^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 9 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0+1+0 & 0+3-3 & 0-1+1 \\ \frac{3}{2}-\frac{3}{2}+0 & -\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+6 & \frac{1}{2}+\frac{3}{2}-2 \\ \frac{9}{2}-\frac{9}{2}+0 & -\frac{3}{2}-\frac{27}{2}+15 & \frac{3}{2}+\frac{9}{2}-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

4.11 USO DE LA MATRIZ INVERSA PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES

El método desarrollado para obtener la matriz inversa conduce a la solución de sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. Consideremos, por ejemplo, un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

que puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$A \qquad X \qquad B$

Las tres matrices anteriores se denominan *matriz de los coeficientes*, A , *matriz de las incógnitas*, X , y *matriz de los términos independientes*, B . Luego:

$AX = B$

(4.18)

Si multiplicamos ambos miembros de (4.18) por A^{-1} :

$$A^{-1} \cdot AX = A^{-1} B \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)X = A^{-1} B$$

Pero $A^{-1} \cdot A = I$. Entonces:

$$IX = A^{-1} B$$

Como $IX = X$, nos queda finalmente:

$X = A^{-1} B$

(4.19)

Es decir, si A^{-1} existe, la solución del sistema puede determinarse a partir de

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Los ejemplos siguientes muestran detalles del procedimiento a seguir cuando se utiliza este método para resolver un sistema de ecuaciones.

✧ EJEMPLO 4.16

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones usando la matriz inversa:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 16 \\ x + y = -3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + 3z = 14 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$$

☆ **Solución**

a) El sistema de ecuación puede escribirse como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix}}_B$$

Hallaremos primero la matriz inversa A^{-1} , usando el procedimiento ya descrito:

$$\left[\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_A : \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_I \right]$$

1) Multiplicando la fila 2 por 2 y restándola a la primera fila:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

2) Restándole la fila 1 a la fila 2:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

3) Multiplicando la fila 2 por $4/5$ y sumándosela a la fila 1:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right]}_{A^{-1}}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -16 & -9 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 \\ -25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Del resultado anterior se obtienen: $x = 2$, $y = -5$.

b) Podemos escribir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix}}_B$$

Para determinar A^{-1} procederemos de la manera siguiente:

$$\left[\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_A : \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_I \right]$$

1) Le restamos la fila 3 a la fila 1.

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

2) Multiplicamos la fila 3 por 3 y se la restamos a la fila 2.

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 0 & : & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

3) Multiplicamos la fila 1 por 2 y se la restamos a la fila 2.

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & : & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

4) Multiplicamos la fila 2 por $2/5$ y le sumamos el resultado a la fila 3.

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & : & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & -4/5 & 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \right]$$

5) Dividimos la fila 2 por -5 .

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & : & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & : & -4/5 & 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} \right]$$

6) Sumamos la fila 2 a la fila 1.

Luego:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & 7/5 & -1/5 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 2/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -4/5 & 2/5 & 3/5 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_I \qquad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{A^{-1}}$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Podemos entonces escribir:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 7 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 28 - 14 - 4 \\ 8 - 14 + 1 \\ -16 + 28 + 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow x = 2, y = -1, z = 3$$

* Ejercicios

4.16 Determina la matriz inversa, si existe, para las matrices dadas:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$\text{j)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{k)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{l)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 8 & -5 & -10 \\ 3 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 8 & 7 & -9 \end{bmatrix}$$

4.17 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones usando la matriz inversa:

$$\text{a)} \quad \begin{aligned} 3x + y &= 12 \\ 2x - y &= 13 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \begin{aligned} -y + z &= 1 \\ x &= 0 \\ -x + y &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad \begin{aligned} x - 4y + z &= 0 \\ 2x - y - z &= 2 \\ x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad \begin{aligned} -5x + 4y + 6z &= -1 \\ 3x - 2y - 3z &= 1 \\ -x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{e)} \quad \begin{aligned} 4x + 5y + 6z &= 1 \\ 3x + 3y + 5z &= 1 \\ 2x + y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{f)} \quad \begin{aligned} 4x - y - z &= 1 \\ x + y + 2z &= -1 \\ -x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

DETERMINANTES

5.1 DETERMINANTES DE ORDEN 2

El concepto de determinantes aparece naturalmente en la solución de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Consideremos el sistema:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

cuya solución es:

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \quad (5.2)$$

¿Cómo se obtienen el denominador y el numerador de los resultados anteriores? Para visualizar cómo se obtiene el denominador común de x_1 y x_2 , expresemos el sistema (5.1) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$A \quad X \quad B$

El *determinante de la matriz A* se define como el número que resulta de restar los productos $a_{11}a_{22}$ y $a_{21}a_{12}$. El determinante de A se representa como:

$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Podemos establecer entonces que los denominadores de x_1 y x_2 dados por (5.2) son iguales al determinante de la matriz A .

Veamos ahora cómo obtener los numeradores de la expresión (5.2). Para ello formemos los determinantes D_1 y D_2 dados por:

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - b_2 a_{12} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}$$

El determinante D_1 se forma sustituyendo la columna 1 de la matriz A por la columna de la matriz B . La columna 2 de D_1 es la misma columna de la matriz A . El determinante D_2 se forma sustituyendo la columna 2 de la matriz A por la columna de la matriz B . La columna 1 de D_1 es la misma columna de la matriz A .

De acuerdo con lo establecido y con (5.2), podemos escribir:

$$x_1 = \frac{D_1}{\Delta} \qquad x_2 = \frac{D_2}{\Delta} \qquad (5.4)$$

✱ EJEMPLO 5.1

Usa el concepto de determinante para resolver el sistema:

$$2x + y = 0$$

$$5x - 2y = 9$$

☆ Solución

El determinante del sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 5 \cdot 1 = -9$$

Los valores de x y y están dados por:

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} [0 \cdot (-2) - 9 \cdot 1] = -\frac{1}{9} (-9) = 1$$

$$y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} [2 \cdot 9 - 5 \cdot 0] = -\frac{18}{9} = -2$$

5.2 DETERMINANTES DE ORDEN 3. REGLAS DE SARRUS Y DE CRAMER.

Consideremos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{array}{rclcl} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & a_{13}x_3 & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & a_{23}x_3 & = & b_2 \\ (5.5) & & & & \\ a_{31}x_1 + & a_{32}x_2 + & a_{33}x_3 & = & b_3 \end{array}$$

que puede ser expresado en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Si resolvemos el sistema (5.5), obtenemos (compruébalo):

$$x_1 = \frac{b_1(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - b_2(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + b_3(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}} \quad (5.7)$$

$$x_2 = \frac{-b_1(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + b_2(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) - b_3(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}} \quad (5.8)$$

$$x_3 = \frac{b_1(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) - b_2(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) + b_3(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}} \quad (5.9)$$

Como puede verse de las soluciones para x_1 , x_2 y x_3 , el denominador en los tres casos es el mismo. Este denominador común es el determinante Δ del sistema:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \quad (5.10)$$

De la expresión para Δ , observamos que los términos que la conforman se alternan en cuanto al signo. Es decir, el primer término, $a_{11}a_{22}a_{33}$, está precedido de signo positivo, el segundo término, $a_{11}a_{32}a_{23}$, está precedido de signo negativo y así sucesivamente.

El valor del determinante del sistema dado por (5.10) puede determinarse a partir de la **Regla de Sarrus** que requiere los siguientes pasos:

1. Se escriben las dos primeras filas al final de la matriz del sistema:

$$\begin{array}{ccc|l} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} & \leftarrow \text{fila 1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \leftarrow \text{fila 2} \end{array} \quad \leftarrow \text{Determinante de la matriz del sistema}$$

2. Se efectúan los productos de los tres términos que están en las diagonales de izquierda a derecha. Estos términos están precedidos por signos positivos. Se efectúan los productos de los tres términos que están en las

diagonales de derecha a izquierda. A estos términos se les precede de signos negativos:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{array} \right| \\
 \begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23}
 \end{array}
 \end{array}
 &
 &
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 a_{31} & a_{32} & a_{33}
 \end{array} \right| \\
 \begin{array}{ccc}
 a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
 a_{21} & a_{22} & a_{23}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

3. Sumando los productos obtenidos en (2), obtenemos el valor del determinante del sistema.

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \quad (5.11)$$

Ahora bien, ¿cómo obtenemos los numeradores de x_1 , x_2 y x_3 dados en (5.7), (5.8) y (5.9)? Para obtener el valor de x_1 formamos la matriz X_1 en la cual la columna de los coeficientes de x_1 es reemplazada por la columna de los términos independientes:

$$X_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

El determinante, Δ_1 , de la matriz X_1 puede obtenerse mediante la regla de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c}
 \left| \begin{array}{ccc}
 b_1 & a_{12} & a_{13} \\
 b_2 & a_{22} & a_{23} \\
 b_3 & a_{32} & a_{33}
 \end{array} \right| \\
 \begin{array}{ccc}
 b_1 & a_{12} & a_{13} \\
 b_2 & a_{22} & a_{23}
 \end{array}
 \end{array}
 &
 &
 \begin{array}{l}
 \Delta_1 = b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{22}a_{13} + \\
 - b_1a_{32}a_{23} - b_2a_{12}a_{33} \\
 \\
 \Delta_1 = b_1(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + b_2(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) + \\
 + b_3(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})
 \end{array}
 \end{array}$$

El valor de Δ_1 coincide con el numerador de (5.7). Usando la regla de Sarrus podemos también obtener los numeradores de (5.8) y (5.9). De acuerdo con lo anterior, podemos establecer que el valor de x_1 está dado por:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad (5.12)$$

Donde:

Δ : valor del determinante de la matriz del sistema.

Δ_1 : valor del determinante que resulta al substituir la primera columna de Δ por la columna de los términos independientes.

La relación (5.12) puede expresarse como:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad (5.13)$$

De la misma manera:

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad (5.14)$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad (5.15)$$

El procedimiento establecido por (5.13), (5.14) y (5.15) se conoce como **regla de Cramer**.

✱ EJEMPLO 5.2

Utiliza el concepto de determinante y las reglas de Sarrus y Cramer para obtener la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3x - 5y + z &= -9 \\ x + y - z &= 1 \\ 3y + 2z &= 22 \end{aligned}$$

★ Solución

En forma matricial tenemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \\ 22 \end{bmatrix}$$

El valor del determinante del sistema es:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \Delta = 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-5) \cdot (-1) + \\ - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-5) \cdot 2 \\ \Delta = 6 + 3 + 0 - 0 + 9 + 10 = 28 \Rightarrow \Delta = 28$$

El valor de x puede calcularse de: $x = \frac{\begin{vmatrix} -9 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 22 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{28}$

El valor del determinante, Δ_x , del numerador, lo obtenemos a partir de la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} -9 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 22 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \Delta_x = (-9) \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 22 \cdot (-5) \cdot (-1) + \\ - 22 \cdot 1 \cdot 1 - (-9) \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot (-5) \cdot 2 \\ \Delta_x = -18 + 3 + 110 - 22 - 27 + 10 = 56 \Rightarrow \Delta_x = 56$$

Luego:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{56}{28} = 2 \Rightarrow x = 2$$

Similarmenle, Δ_y y el valor de y pueden calcularse a partir de:

$$\begin{vmatrix} 3 & -9 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 22 & 2 \\ 3 & -9 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_y &= 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 22 \cdot 1 + 0 \cdot (-9) \cdot (-1) + \\ &\quad - 0 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 22 \cdot (-1) - 1 \cdot (-9) \cdot 2 \\ \Delta_y &= 6 + 22 + 66 + 18 = 112 \Rightarrow \Delta_y = 112 \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{112}{28} = 4 \Rightarrow y = 4 \end{aligned}$$

Finalmente, determinamos Δ_z y z :

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 22 \\ 3 & -5 & -9 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta_z &= 3 \cdot 1 \cdot 22 + 1 \cdot 3 \cdot (-9) + 0 \cdot (-5) \cdot 1 + \\ &\quad - 0 \cdot 1 \cdot (-9) - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-5) \cdot 22 \\ \Delta_z &= 66 - 27 - 9 + 110 = 140 \Rightarrow \Delta_z = 140 \\ z &= \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{140}{28} = 5 \Rightarrow z = 5 \end{aligned}$$

La regla de Sarrus puede también aplicarse si el determinante de tercer orden es modificado agregándole las dos primeras columnas al lado derecho del mismo. En este caso los productos se efectúan de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \Delta &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ &\quad - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

* Ejercicios

Usa determinantes y las reglas de Sarrus y Cramer para resolver los siguientes ejercicios.

5.1 Evalúa los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$

$$\text{d)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\text{f)} \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{g)} \begin{vmatrix} a & a & 1 \\ b & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{h)} \begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$$

$$\text{i)} \begin{vmatrix} y+z & x & x \\ y & x+z & y \\ z & z & x+y \end{vmatrix}$$

$$\text{j)} \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{k)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{l)} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{m)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\text{n)} \begin{vmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{o)} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ -x & x & 1 \end{vmatrix}$$

5.2 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a)} \begin{cases} x + 2y = 7 \\ x - 3y = -8 \end{cases}$$

$$\text{b)} \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$$

$$\text{c)} \begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 3x + 5y = 2 \end{cases}$$

$$\text{d)} \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3y = 2 \end{cases}$$

$$\text{e)} \begin{cases} 2x = 3 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\text{f)} \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ -3x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$\text{g)} \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{h)} \begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ -2y + 3z = 5 \\ x + z = 4 \end{cases}$$

$$\text{i)} \begin{cases} 2x + 5y - z = 3 \\ -3x - 2y + 2z = 4 \\ -x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

$$\text{j)} \begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$\text{k)} \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ 3y + 2z = -1 \\ -z = 3 \end{cases}$$

$$\text{l)} \begin{cases} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + y + z = -1 \\ -x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

5.3 Demuestra que:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación de una línea recta que pasa por los puntos (3, 5) y (-1, 2).

5.4 Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ x & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & x \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & x-2 & 2 \\ -2 & x-1 & 3 \\ 0 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

5.3 DETERMINANTES DE ORDEN n

Un determinante de orden n tiene n filas y n columnas y se representa de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \quad (5.16)$$

Como ya establecimos en el caso de los determinantes de orden 2 y 3, el valor de un determinante es un número. Para determinantes de orden 3 el valor de ese número podemos encontrarlo mediante la regla de Sarrus. Esta regla no es válida para determinantes de orden superior a 3. En este último caso se utiliza los conceptos de *menor* y *cofactor*, que definiremos a continuación.

Consideremos el desarrollo de un determinante de orden 3 dado por:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} + \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \quad (5.17)$$

Sacando factor común en (5.17) a los elementos de la columna 1; a_{11} , a_{21} y a_{31} , tenemos:

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \quad (5.18)$$

La expresión anterior puede escribirse como:

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad (5.19)$$

A los determinantes de (5.19) se les denomina menores de los elementos a_{11} , a_{21} y a_{31} , respectivamente, y se les denota por M_{11} , M_{21} y M_{31} . Luego:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

De forma que:

$$\Delta = a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} + a_{31} M_{31} \quad (5.20)$$

Si estudiamos (5.19) veremos la manera cómo se obtienen los menores M_{11} , M_{21} y M_{31} a partir del determinante de orden 3:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

El menor M_{11} se obtiene eliminando la fila 1 y la columna 1 del determinante. El menor M_{21} se obtiene eliminando la fila 2 y la columna 1. El menor M_{31} se obtiene eliminando la fila 3 y la columna 1. En este caso se dice que el determinante se ha desarrollado por la columna 1.

Si ahora sacamos factor común los elementos de la fila 1 del determinante, obtenemos, a partir de (5.17), la siguiente expresión:

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \quad (5.21)$$

que puede escribirse como:

$$\Delta = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Los menores de a_{11} , a_{21} y a_{31} son:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

De manera que:

$$\Delta = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} \quad (5.22)$$

Nuevamente, a partir del determinante original, podemos ver la manera de obtener los menores:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

En este último caso estudiado, el determinante se dice que ha sido desarrollado por la primera fila. Nuevamente se repite el patrón anterior. Es decir:

M_{11} es el determinante que resulta al eliminar la fila 1 y la columna 1.

M_{12} es el determinante que resulta al eliminar la fila 1 y la columna 2.

M_{13} es el determinante que resulta al eliminar la fila 1 y la columna 3.

En todos los casos, los menores resultantes corresponden a determinantes de un orden menor (orden 2) al orden del determinante original (orden 3). Es importante también hacer notar que en las relaciones (5.21) y (5.22) hay una alternancia de signos en los productos $a_{ij} M_{ij}$ del determinante Δ : el primer signo es positivo, el segundo negativo y el tercero positivo. Esta alternancia de signos se presenta cuando el determinante se desarrolla por

cualquier fila o columna. A continuación, se expresan todas las posibilidades:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + a_{13} M_{13} \quad (\text{Primera fila}) \\ -a_{21} M_{21} + a_{22} M_{22} - a_{23} M_{23} \quad (\text{Segunda fila}) \\ a_{31} M_{31} - a_{32} M_{32} + a_{33} M_{33} \quad (\text{Tercera fila}) \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} + a_{31} M_{31} \quad (\text{Primera columna}) \\ -a_{12} M_{12} + a_{22} M_{22} - a_{32} M_{32} \quad (\text{Segunda columna}) \\ a_{13} M_{13} - a_{23} M_{23} + a_{33} M_{33} \quad (\text{Tercera columna}) \end{array}$$

Hay que enfatizar que en cualquiera de los desarrollos anteriores, bien sea por fila o por columna, el resultado siempre es el mismo. Observa el patrón de los signos: el signo que antecede a cualquier término $a_{ij} M_{ij}$ del desarrollo del determinante es:

$\text{Signo de } a_{ij} M_{ij} : (-1)^{i+j}$

(5.23)

Así, por ejemplo:

Signo que antecede a $a_{21} M_{21}$: negativo, porque $(-1)^{2+1} = -1$.

Signo que antecede a $a_{31} M_{31}$: positivo, porque $(-1)^{3+1} = 1$.

Como recurso nemotécnico, la alternancia de signos también puede obtenerse a partir de la siguiente figura:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

El proceso de determinar los productos $a_{ij} M_{ij}$ se agiliza con la práctica y muchas veces dichos productos se efectúan mentalmente. Al menor afectado por el signo positivo o negativo se le conoce con el nombre de *cofactor* y se le representa como:

$$\text{Cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (5.24)$$

✱ EJEMPLO 5.3

Evalúa los siguientes determinantes:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{Por la segunda fila y la tercera columna.}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{Por la segunda columna y la tercera fila.}$$

☆ Solución

a) Por la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} -a_{12}M_{12} &= (-1) \cdot (1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-1) \cdot [3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-5)] = \\ &= (-1) \cdot (3 - 5) = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} a_{22}M_{22} &= (1) \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 4 \cdot [4 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)] = 4 \cdot 4 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} -a_{23}M_{23} &= (-1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= (-3) \cdot [4 \cdot (-5) - 0 \cdot 3] = \\ &= (-3) \cdot (-20) = 60 \end{aligned}$$

Luego:

$$\Delta = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23} = 2 + 16 + 60 = 78$$

Por la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad a_{13}M_{13} = (1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot [1 \cdot (-5) - 0 \cdot 4] =$$

$$= (-1) \cdot (-5) = 5$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} \quad -a_{23}M_{23} = (-1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \cdot [4 \cdot (-5) - 0 \cdot 3] =$$

$$= (-3) \cdot (-20) = 60$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad a_{33}M_{33} = 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = [4 \cdot 4 - 1 \cdot 3] = 16 - 3 = 13$$

Finalmente:

$$\Delta = -a_{13}M_{13} + a_{23}M_{23} - a_{33}M_{33} = 5 + 60 + 13 = 78$$

b) Por la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad -a_{12}M_{12} = (-1) \cdot (3) \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3) \cdot [5 \cdot 1 - 8 \cdot (-2)] =$$

$$= (-3) \cdot [5 + 16] = (-3) \cdot (21) = -63$$

Los otros productos son iguales a cero, ya que $a_{22} = a_{32} = 0$.

Por la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$a_{31} M_{31} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-6) = -48$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$a_{32} M_{32} = 0, \text{ ya que } a_{32} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$a_{33} M_{33} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-15) = -15$$

Sumando, obtenemos:

$$\Delta = -48 + 0 - 15 = -63$$

El procedimiento descrito para obtener el valor de un determinante de tercer orden puede extenderse a determinantes de orden superior a 3 mediante la expresión de los mismos por medio de menores complementarios. Consideremos un determinante de orden 4:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

El desarrollo por la primera columna mediante menores conduce al siguiente resultado:

$$a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} + a_{31} M_{31} - a_{41} M_{41} \quad (5.25)$$

donde M_{11} , M_{21} , M_{31} y M_{41} son los menores obtenidos eliminando filas y columnas según lo señalado a continuación:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$M_{41} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

Luego, (5.25) puede escribirse como:

$$a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{41} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix} \quad (5.26)$$

Observa que los determinantes M_{11} , M_{21} , M_{31} y M_{41} son de orden 3, un orden menor en comparación con el determinante original. Los determinantes de orden 3 pueden a su vez desarrollarse por menores tal como ya hemos visto.

Debe notarse, además, que nuevamente existe una alternancia en los signos que anteceden a los menores:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

Para un determinante de orden n , desarrollado por la primera columna, se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11} M_{11} - a_{21} M_{21} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} M_{n1} \quad (5.27)$$

donde $(-1)^{n+1} a_{n1} M_{n1}$ representa el término enésimo en el desarrollo por la primera columna del determinante, A_{11} , A_{21} , ..., A_{n1} son los menores correspondientes y el número $(-1)^{n+1}$ establece el signo que antecede al menor, su valor es positivo si n es impar y negativo si n es par.

En general, un determinante de orden n puede desarrollarse por cualquier fila o columna usando los cofactores, es decir, los menores afectados por signos positivos o negativos de acuerdo a la relación (5.23). Si desarrollamos por la primera columna y llamamos:

$$A_{i1} = (-1)^{n+1} M_{i1} \quad (5.28)$$

al cofactor de cada término del desarrollo, podemos escribir:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + \dots + a_{n1} A_{n1} \quad (5.29)$$

✱ EJEMPLO 5.4

Evalúa el siguiente determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

☆ Solución

Desarrollaremos el determinante por la segunda fila. La expresión general del resultado es:

$$\Delta = -3M_{21} + 1M_{22} - 2M_{23} + 1M_{24} \quad (5.30)$$

Procedamos a calcular los menores M_{21} , M_{22} , M_{23} y M_{24} .

Cálculo de M_{21} :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando M_{21} :

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 8 + 24 - 12 - 16 + 16 = 20$$

Cálculo de M_{22} :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando M_{22} :

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 4 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 4 + 24 + 6 - 4 + 16 = 50$$

Cálculo de M_{23} :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Desarrollando M_{23} :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{23} = 4 - 4 + 12 + 6 - 2 - 16 = 0$$

Cálculo de M_{24} :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

Desarrollando M_{24} :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad M_{24} = 8 - 8 - 16 - 8 - 4 - 32 = -60$$

Entonces, de (5.30):

$$\Delta = -3 \cdot 20 + 50 - 2 \cdot 0 - 60 = -60 + 50 - 60 = -70$$

✱ EJEMPLO 5.5

Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1 & x-2 & 2 \\ -2 & x-1 & 3 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$$

★ Solución

Desarrollando el determinante por la primera columna:

$$1 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2 & x \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ x-1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(x-1) - 6 + 2[(x-2)x - 4] + 3(x-2) - 2(x-1) = 0$$

$$x^2 - x - 6 + 2(x^2 - 2x - 4) + 3x - 6 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 18 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 216}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{232}}{6} \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{58}}{3}$$

✧ EJEMPLO 5.6

Determina el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

★ Solución

Aprovechando que la tercera columna tiene dos ceros, desarrollaremos el determinante por esa columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow -2 A_{31} \Rightarrow -2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -2 \cdot 12 = -24$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow 4 A_{33} \Rightarrow 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 36 = 144$$

Entonces, el valor del determinante es: $\Delta = -2 A_{31} + 4 A_{33} = 144 - 24 = 120$

✱ EJEMPLO 5.7

Usa la regla de Sarrus para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + z + w &= 4 \\ 3x + y - 2z - w &= -6 \\ 5x + y + 2w &= 1 \\ 4z - 3w &= 19 \end{aligned}$$

☆ Solución

El sistema puede escribirse de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \\ 19 \end{bmatrix}$$

Desarrollaremos el determinante del sistema por la segunda columna, debido a la presencia de dos ceros en la misma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 27 = 27$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 31 = -31$$

Luego: $\Delta = 27 - 31 = -4$

Los valores de x , y , z y w están dados por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 19 & 0 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1 \quad (\text{Desarrolla el determinante por la segunda columna})$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 19 & 4 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{8}{-4} = -2 \quad (\text{Desarrolla el determinante por la tercera fila})$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -6 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 19 & -3 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{-16}{-4} = 4 \quad (\text{Desarrolla el determinante por la cuarta fila})$$

$$w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -6 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 19 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{4}{-4} = -1 \quad (\text{Desarrolla el determinante por la cuarta fila})$$

* Ejercicios

5.5 Evalúa los siguientes determinantes usando menores:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -5 & -3 & 8 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 6 & 6 & 9 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 7 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 6 & 6 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{g) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 & 3 \\ 7 & 0 & 0 & -5 \\ 8 & 1 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 6 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{h) } \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{i) } \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & -6 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

5.6 Determina el valor de x en las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 3 & -1 & x \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x-1 & 3 & 4 \\ 0 & x & -2 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & x & -5 \\ 0 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

5.7 Usa la regla de Cramer para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} x & + 2z = 0 \\ & y - z = 5 \\ x & - 3z = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ & y - z = 0 \\ & -z = 6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + z = -3 \\ 2x + y + 3z = -1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + y + 3w = 12 \\ x + z - w = -3 \\ -3x + 2y - 5z = 2 \\ x + y + z + w = 2 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} y - 3z = -11 \\ 2x + y = 5 \\ -x + 2w = -15 \\ 4z - w = -32 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} -x + 2y + 4z + 3w = -6 \\ 2x - y + 3z + w = 6 \\ 3x - 2y - z + 4w = -1 \\ 4x + 3y - 5z - 4w = 8 \end{cases}$$

5.4 USO DE DETERMINANTES PARA DETERMINAR LA MATRIZ INVERSA

En la sección 4.1 definimos la matriz transpuesta como aquella que se obtiene intercambiando filas y columnas. Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

donde la fila 1 se intercambió con la columna 1, la fila 2 con la columna 2 y la fila 3 con la columna 3.

La *matriz adjunta* de una matriz cuadrada A es la transpuesta de la matriz obtenida a partir de A , reemplazando cada elemento a_{ij} por su cofactor, A_{ij} .

El adjunto de A se denota como $\text{adj } A$. Es decir, para obtener la matriz adjunta de A se procede así:

1. Se determinan los cofactores A_{ij} de cada elemento a_{ij} de A .
2. Se reemplaza cada elemento a_{ij} por su cofactor A_{ij} .
3. Se determina la transpuesta de la matriz formada en 2.

✱ EJEMPLO 5.8

Determina la matriz adjunta de:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

☆ Solución

1. La matriz A puede escribirse como: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

Los cofactores de los elementos de A son:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

2. Reemplazando a_{ij} por A_{ij} :

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

3. Finalmente:

$$\text{adj } A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

En la sección 4.10 estudiamos un procedimiento para determinar la inversa de una matriz. En este caso, había que efectuar una serie de manipulaciones que hacían el proceso lento y complicado. Otra forma de obtener la inversa de una matriz A es dividiendo la matriz adjunta de A por el determinante de A . Es decir:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\det A} \quad (5.28)$$

✱ EJEMPLO 5.9

Determina la inversa de la matriz A del ejemplo 5.8 dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

☆ Solución

El determinante de A es:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Usando el resultado del ejemplo (5.9):

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -5 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}}{-4} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

✱ EJEMPLO 5.10

Usando la matriz inversa, determina la solución del sistema:

$$\begin{aligned} 3x - 4y + z &= -1 \\ 5x &\quad - 2z = 3 \\ y - z &= -10 \end{aligned}$$

☆ Solución

De acuerdo con la relación (4.18): $X = A^{-1} \cdot B$, donde X es la matriz de las incógnitas, A^{-1} es la matriz inversa de los coeficientes y B es la matriz de los términos independientes. Para este ejemplo podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix}$$

La matriz A^{-1} está dada por (5.28). Los cofactores de A son:

$$\begin{array}{lll} A_{11} = 2 & A_{12} = 5 & A_{13} = 5 \\ A_{21} = -3 & A_{22} = -3 & A_{23} = -3 \\ A_{31} = 8 & A_{32} = 11 & A_{33} = 20 \end{array}$$

Se obtienen así las siguientes matrices:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \\ 8 & 11 & 20 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 5 & -3 & 11 \\ 5 & -3 & 20 \end{bmatrix}$$

El determinante de la matriz A es:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

Luego:

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -3 & 8 \\ 5 & -3 & 11 \\ 5 & -3 & 20 \end{bmatrix}}{-9} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{11}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{20}{9} \end{bmatrix}$$

Usando la relación $X = A^{-1} \cdot B$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{11}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{1}{3} & -\frac{20}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{91}{9} \\ \frac{124}{9} \\ \frac{214}{9} \end{bmatrix}$$

De donde: $x = \frac{91}{9}$, $y = \frac{124}{9}$, $z = \frac{214}{9}$

✱ EJEMPLO 5.11

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$x + w = 0$$

$$x + y = 1$$

$$y - z = 3$$

$$x - w = 6$$

☆ Solución

El sistema puede escribirse como:

$$x + 0y + 0z + w = 0$$

$$x + y + 0z + 0w = 1$$

$$0x + y - z + 0w = 3$$

$$x + 0y + 0z - w = 6$$

De donde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Desarrollemos el determinante del sistema por la tercera columna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-2) = 2$$

Para determinar la matriz inversa, determinemos los cofactores de A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{14} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{34} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{41} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{43} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

La matriz formada por los cofactores y la matriz adjunta son:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{adj } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego, podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -10 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

De donde: $x = 3$, $y = -2$, $z = -5$, $w = -3$

* Ejercicios

5.8 Determina la inversa de las matrices:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

5.9 Determina la solución de los siguientes sistemas usando la matriz inversa:

a) $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + y - z = -8 \\ -x + 2y + 6z = 18 \\ 5x + 3y + 2z = -7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 5 \\ x - 3z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - z = 6 \\ 2x + z = 6 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ y - z = 0 \\ z = 4 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + w = 3 \\ 2y - w = 0 \\ z + 2w = 4 \\ x - z = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -x + 2y + 4z + 3w = -6 \\ 2x - y + 3z + w = 6 \\ 3x - 2y - z + 4w = -1 \\ 4x + 3y - 5z - 4w = 8 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} x - 2y + z = -5 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 11 \end{cases}$

5.5 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Las propiedades que a continuación estudiaremos son aplicables a determinantes de cualquier orden; sin embargo, para facilitar la explicación de las mismas y la comprensión por parte del estudiante, haremos las demostraciones correspondientes con determinantes de tercer orden.

5.5.1. *Si una fila o columna de un determinante tiene todos sus elementos iguales a cero, el valor del determinante es también cero.*

Considera el determinante de tercer orden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la segunda columna:

$$-0 \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = 0$$

5.5.2. *Si un determinante tiene dos filas o columnas iguales, el valor del determinante es nulo.*

Analicemos un determinante de tercer orden cuyas segunda y tercera filas son iguales.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila:

$$a \begin{vmatrix} y & z \\ y & z \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} x & z \\ x & z \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} x & y \\ x & y \end{vmatrix} = a(yz - yz) - b(xz - xz) + c(xy - xy) = 0$$

Como ejemplo desarrollemos por la tercera columna el siguiente determinante con dos filas iguales:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5.5.3. *Si se intercambian dos filas o dos columnas de un determinante, el valor del mismo cambia de signo.*

Considera los determinantes:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & a & m \\ y & b & n \\ z & c & p \end{vmatrix}$$

en los cuales se han intercambiado las columnas 1 y 2. Desarrollando Δ_1 y Δ_2 :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} y & n \\ z & p \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} x & m \\ z & p \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} x & m \\ y & n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = a (yp - zn) - b (xp - mz) + c (xn - my)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & a & m \\ y & b & n \\ z & c & p \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} b & n \\ c & p \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} a & m \\ c & p \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} a & m \\ b & n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = x (bp - cn) - y (ap - cm) + z (an - bm)$$

Arreglando Δ_1 y Δ_2 :

$$\Delta_1 = a (yp - zn) - b (xp - mz) + c (xn - my)$$

$$\Delta_2 = a (zn - yp) - y (mz - xp) + c (my - xn)$$

De las dos relaciones anteriores, se deduce que $\Delta_1 = -\Delta_2$.

Para comprobar la relación anterior en un caso numérico, tomemos los determinantes A y B dados por:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

donde B se obtiene intercambiando las columnas 1 y 3 de A . Desarrollando A y B por la primera fila:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 3 + 20 = 27$$

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -20 + 3 - 10 = -27$$

5.5.4. Si una fila o columna de un determinante se multiplica o divide por un número α , el valor del determinante queda multiplicado o dividido por α .

Tomemos el determinante A , de tercer orden, y multipliquemos su última columna por α :

$$A = \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} a & x & \alpha m \\ b & y & \alpha n \\ c & z & \alpha p \end{vmatrix}$$

Desarrollando B por la tercera columna:

$$B = \alpha m \begin{vmatrix} b & y \\ c & z \end{vmatrix} - \alpha n \begin{vmatrix} a & x \\ c & z \end{vmatrix} + \alpha p \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} = \alpha \left(m \begin{vmatrix} b & y \\ c & z \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} a & x \\ c & z \end{vmatrix} + p \begin{vmatrix} a & x \\ b & y \end{vmatrix} \right)$$

Como la expresión entre paréntesis corresponde al desarrollo del determinante A por la tercera columna, podemos escribir:

$$B = \alpha A$$

La propiedad anterior nos permite sacar factor común en una fila o columna de un determinante y así simplificar los cálculos. Así, por ejemplo, el determinante siguiente podemos simplificarlo de la forma:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -10 & 1 \\ 4 & 20 & -1 \\ 2 & -30 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 10 \cdot (-1) & 1 \\ 4 & 10 \cdot (2) & -1 \\ 2 & 10 \cdot (-3) & 0 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

5.5.5. Si en un determinante una fila o columna es múltiplo de otra, su valor es cero.

Tomemos un determinante A en el cual cada elemento de la tercera fila es un múltiplo del elemento correspondiente de la primera fila:

$$A = \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ \alpha a & \alpha x & \alpha m \end{vmatrix} \quad \alpha = \text{constante}$$

$$\text{Sacando } \alpha \text{ factor común: } A = \alpha \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ a & x & m \end{vmatrix}$$

Como el determinante tiene dos filas iguales, su valor es cero.

Así, el determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & 8 & -5 & 4 \\ 6 & -2 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene valor igual a cero porque la cuarta fila se obtiene multiplicando la primera fila por 2.

5.5.6. Si cada elemento de una fila o columna de un determinante se reemplaza por la suma de dos cantidades, el determinante puede descomponerse en dos determinantes: en uno de ellos aparecen todos los elementos y el primer sumando y en el segundo aparecen todos los elementos y el segundo sumando.

Así, el determinante A:

$$A = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & x & m \\ \gamma + \delta & y & n \\ \phi + \mu & z & p \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} \alpha & x & m \\ \gamma & y & n \\ \phi & z & p \end{vmatrix}}_B + \underbrace{\begin{vmatrix} \beta & x & m \\ \delta & y & n \\ \mu & z & p \end{vmatrix}}_C$$

Para probar la propiedad anterior, desarrollemos A por la primera columna:

$$A = (\alpha + \beta) \begin{vmatrix} y & n \\ z & p \end{vmatrix} - (\gamma + \delta) \begin{vmatrix} x & m \\ z & p \end{vmatrix} + (\phi + \mu) \begin{vmatrix} x & m \\ y & n \end{vmatrix}$$

$$A = \alpha \begin{vmatrix} y & n \\ z & p \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} y & n \\ z & p \end{vmatrix} - \gamma \begin{vmatrix} x & m \\ z & p \end{vmatrix} - \delta \begin{vmatrix} x & m \\ z & p \end{vmatrix} + \phi \begin{vmatrix} x & m \\ y & n \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x & m \\ y & n \end{vmatrix}$$

Arreglando términos:

$$A = \underbrace{\alpha \begin{vmatrix} y & n \\ z & p \end{vmatrix} - \gamma \begin{vmatrix} x & m \\ z & p \end{vmatrix} + \phi \begin{vmatrix} x & m \\ y & n \end{vmatrix}}_{A_1} + \underbrace{\beta \begin{vmatrix} y & n \\ z & p \end{vmatrix} - \delta \begin{vmatrix} x & m \\ z & p \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x & m \\ y & n \end{vmatrix}}_{A_2}$$

Pero A_1 y A_2 corresponden a los desarrollos por la primera columna de los determinantes B y C. Entonces, si:

$$A = \begin{vmatrix} 8 & 5 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+3 & 5 & -3 \\ 2+3 & 1 & 4 \\ -1-3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Podemos escribir:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5.5.7. Si se multiplican todos los elementos de una columna o fila de un determinante por un número α y se suman o restan los elementos correspondientes de otra columna o fila, el valor del determinante no se altera.

Consideremos el determinante A . Multipliquemos su tercera columna por α y sumemos el resultado a los elementos correspondientes de la primera columna:

$$A = \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} a + \alpha m & x & m \\ b + \alpha n & y & n \\ c + \alpha p & z & p \end{vmatrix}$$

De acuerdo con la propiedad descrita en 5.5.6, podemos escribir:

$$B = \begin{vmatrix} a & x & m \\ b & y & n \\ c & z & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha m & x & m \\ \alpha n & y & n \\ \alpha p & z & p \end{vmatrix}$$

Pero el segundo determinante de la relación anterior es nulo por lo discutido en 5.5.5. Por tanto, $A = B$.

Entonces, los determinantes:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Tienen igual valor porque la segunda fila de B se obtiene de A multiplicando la primera fila por 2 y sumándole el resultado a la segunda fila.

5.6 DETERMINANTE DE UNA MATRIZ TRIANGULAR

Se dice que una matriz cuadrada es *triangular inferior* si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son ceros y es *triangular superior* si todos los elementos por encima de la diagonal principal son ceros. Como ejemplos tenemos:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

(Matriz triangular superior)

$$B = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

(Matriz triangular inferior)

El valor del determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Así, por ejemplo:

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 \cdot (-1) = -5$$

5.7 EVALUACIÓN DE UN DETERMINANTE USANDO SUS PROPIEDADES

A menudo es posible evaluar fácilmente un determinante mediante el uso de las propiedades ya estudiadas. La idea básica es tratar de reducir el determinante a la forma triangular. Si esto no es posible, es conveniente obtener, mediante las operaciones adecuadas, el mayor número de ceros en una fila o columna y usar menores para llegar al resultado final. Los ejemplos que siguen muestran los pasos a seguir:

✱ EJEMPLO 5.12

Usa las propiedades estudiadas para calcular el valor de los determinantes:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} & \text{b)} \quad B = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & -9 \end{vmatrix} & \text{c)} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

☆ Solución

a) Multiplicando la primera fila por 2 y restándosela a la segunda fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -8 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la primera fila por 3 y restándosela a la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 7 & -10 \end{vmatrix}$$

Restándole la segunda fila a la tercera:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Encontramos así un determinante cuyo valor está dado por el producto de los elementos de su diagonal principal:

$$A = 1 \cdot 7 \cdot (-2) = -14$$

b) Dividiendo la última columna por 3:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ 7 & -8 & -3 \end{vmatrix}$$

Intercambiando las columnas 1 y 3:

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & -8 & 7 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la fila 1 por 2 y sumando el resultado a la fila 2:

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 14 \\ -3 & -8 & 7 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la fila 1 por 3 y sumando el resultado a la fila 3:

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 14 \\ 0 & -2 & 22 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la fila 2 por -2 y sumando el resultado a la fila 3:

$$-3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

Luego:

$$B = (-3) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (-6) = -18$$

c) Sumando la fila 1 a la fila 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la fila 1 por 2 y restando el resultado a la fila 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la fila 3 por 3 y sumando el resultado a la fila 4:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

El valor del determinante anterior es:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Intercambiando las columnas 1 y 3: -

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la fila 1 por 3 y por 5 y restando los resultados a las filas 2 y 3 respectivamente: -

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -9 \\ 0 & 10 & -13 \end{vmatrix}$$

Multiplicando la fila 2 por 2 y restando el resultado a la fila 3: -

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -25$$

✱ EJEMPLO 5.13

Si el determinante $\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = -3$, determina el valor de:

$$\text{a) } \Delta = \begin{vmatrix} u & v & w \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad \text{b) } \Delta = \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 3u & 3v & 3w \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \quad \text{c) } \Delta = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ u-2a & v-2b & w-2c \\ 4x+1 & 4y-2 & 4z \end{vmatrix}$$

☆ Solución

a) Intercambiando las filas 1 y 3: $-\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}$

Intercambiando las filas 2 y 3: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3 \Rightarrow \Delta = 3$

b) Sacando factor común a -1 en la primera fila, 3 en la segunda fila y 2 en la tercera fila:

$$(-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow \Delta = -18$$

c) Usando la propiedad descrita en (5.5.6), podemos reemplazar el determinante dado por dos determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2a & -2b & 2c \\ u-2a & v-2b & w-2c \\ 4x+1 & 4y-2 & 4z \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}}_{\Delta_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b & c \\ -2a & -2b & -2c \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}}_{\Delta_2}$$

Sacamos 4 como factor común de Δ_1 y -2 factor común en Δ_2 :

$$\Delta = 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ 4 & y & z \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

El segundo determinante de la suma anterior es cero por tener dos filas iguales, por tanto:

$$\Delta = 4 \cdot 3 = 12$$

✱ EJEMPLO 5.14

Demuestra la siguiente igualdad:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix} = (x+y+z)^3$$

☆ Solución

Sumándole las filas 2 y 3 a la fila 1: $\Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & x+y+z & x+y+z \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$

Sacando $(x+y+z)$ factor común: $\Delta = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2y & y-x-z & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$

Restando la columna 1 a las columnas 2 y 3:

$$\Delta = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2y & -x-y-z & 0 \\ 2z & 0 & -x-y-z \end{vmatrix}$$

El determinante resultante corresponde a una matriz triangular superior. Por tanto:

$$\Delta = (x+y+z) \cdot [-(x+y+z)] \cdot [-(x+y+z)] = (x+y+z)^3$$

✱ EJEMPLO 5.15

Usando las propiedades de los determinantes, demuestra que:

$$\mathbf{a)} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\mathbf{b)} \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(c-b)(a+b+c)$$

★ Solución

a) Multiplicamos la primera columna por a y restamos el resultado a la segunda columna. Multiplicamos la segunda columna por a y restamos el resultado a la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b^2-ab \\ 1 & c-a & c^2-ac \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b-a & b(b-a) \\ 1 & c-a & c(c-a) \end{vmatrix}$$

Sacamos factor común a $(b-a)$ en la segunda fila y a $(c-a)$ en la tercera fila:

$$(b-a)(c-a) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}$$

Luego: $\Delta = (b-a)(c-a)(c-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$

b) Multiplicamos la primera fila por a y el resultado lo restamos a la segunda fila. Multiplicamos la segunda fila por a^2 y restamos el resultado a la tercera fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^3-a^2b & c^3-a^2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b^2-a^2) & c(c^2-a^2) \end{vmatrix}$$

Restamos la columna 1 a las columnas 2 y 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b(b^2-a^2) & c(c^2-a^2) \end{vmatrix}$$

Sacando factor común $(b-a)$ en la segunda columna y $(c-a)$ en la tercera columna:

$$(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b(b-a) & c(c+a) \end{vmatrix}$$

Restándole la columna 2 a la columna 3:

$$(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b(b-a) & c(c+a)-b(b+a) \end{vmatrix}$$

Finalmente obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta &= (b-a)(c-a)[c(c+a)-b(b+a)] = (b-a)(c-a)[c^2+ac-b^2-ab] = \\ &= (b-a)(c-a)[a(c-b)+c^2-b^2] = (b-a)(c-a)\{(c-b)[a+(c+b)]\} = \\ &= (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c) \end{aligned}$$

* Ejercicios

5.10 Usa las propiedades de los determinantes para evaluar:

$$\text{a) } \Delta = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -6 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{e) } \Delta = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & -4 \\ -3 & 5 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

5.11 Evalúa mentalmente los siguientes determinantes usando las propiedades estudiadas:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -6 & -2 & -8 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5.12 Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, evalúa los siguientes determinantes:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} c & a & b \\ w & u & v \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{b)} \begin{vmatrix} u & v & -w \\ a & b & -c \\ x & y & -z \end{vmatrix}$$

5.13 Demuestra las siguientes relaciones:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{b)} \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = (y-z)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy)$$

$$\mathbf{c)} \begin{vmatrix} q+r & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$\mathbf{d)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & w \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(w-x)(z-y)(w-y)(w-z)$$

5.14 Demuestra, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} x & 1 & y+z \\ y & 1 & x+z \\ z & 1 & x+y \end{vmatrix} \quad \mathbf{b)} \begin{vmatrix} x & y & 2x \\ 2x & -6 & -y \\ x^{m+1} & yx^m & 2x^{m+1} \end{vmatrix}$$

5.8 PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Dados los vectores en R^3 :

$$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad \vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

El *producto vectorial*, representado por $\vec{u} \times \vec{v}$, se define como:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left\langle \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right\rangle \quad (5.30)$$

o, desarrollando los determinantes:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \langle u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1 \rangle$$

Como lo indica la expresión anterior, el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es también un vector.

En el capítulo 3 vimos que cualquier vector puede expresarse en términos de la base canónica conformada por los vectores unitarios $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$. De acuerdo a esto, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ pueden escribirse como:

$$\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k} \quad \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}$$

y la relación (5.30) se convierte en:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k} \quad (5.31)$$

expresión que corresponde al desarrollo por la primera fila del determinante:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (5.32)$$

✱ EJEMPLO 5.16

Determina el producto vectorial de los vectores:

$$\vec{u} = \langle 1, -2, 3 \rangle \quad \vec{v} = \langle 3, 0, -1 \rangle$$

y determina los productos escalares $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}$ y $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}$.

☆ Solución

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ pueden expresarse como:

$$\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} \quad \vec{v} = 3\vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k}$$

Y su producto vectorial es otro vector dado por:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{i} + 10\vec{j} + 6\vec{k}$$

Los productos escalares $\vec{w} \cdot \vec{u}$ y $\vec{w} \cdot \vec{v}$ son:

$$\vec{w} \cdot \vec{u} = (2\vec{i} + 10\vec{j} + 6\vec{k}) \cdot (\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}) = 2 - 20 + 18 = 0$$

$$\vec{w} \cdot \vec{v} = (2\vec{i} + 10\vec{j} + 6\vec{k}) \cdot (3\vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k}) = 6 - 6 = 0$$

Estos últimos resultados expresan que el vector $\vec{w}$, producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es perpendicular a dichos vectores. Esto equivale a decir que el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$ es un vector perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$.

Lo deducido en el ejemplo anterior para un caso particular de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ puede generalizarse para dos vectores cualesquiera. Es decir, dados:

$$\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \quad \vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

se verifica que:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0 \quad (5.33)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) = \\ &= [(u_2 v_3 - u_3 v_2) \vec{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \vec{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \vec{k}] \cdot (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) \\ &= u_1 u_2 v_3 - u_1 u_3 v_2 - u_1 u_2 v_3 + u_2 u_3 v_1 + u_1 u_3 v_2 - u_2 u_3 v_1 = 0 \end{aligned}$$

resultado que es similar para $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v}$. Es decir, el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular tanto a $\vec{u}$ como a $\vec{v}$. En otras palabras, este vector es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Para visualizar el significado geométrico del producto vectorial, observemos la fig. 5.1. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman el plano π y se cortan en el punto O . El producto vectorial, representado por el vector $\vec{w}$, es perpendicular al plano π formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

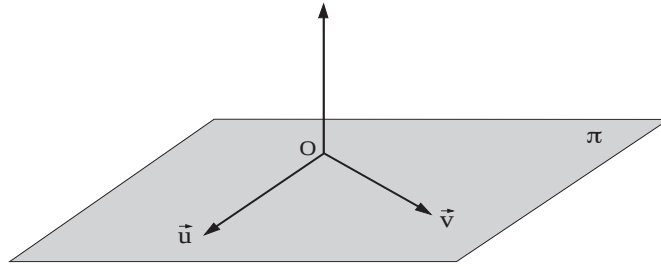


Fig. 5.1 Significado geométrico del producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

5.9 MAGNITUD Y DIRECCIÓN DEL PRODUCTO VECTORIAL $\vec{u} \times \vec{v}$.

El producto $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \underbrace{(u_2 v_3 - u_3 v_2)}_{w_1} \vec{i} - \underbrace{(u_1 v_3 - u_3 v_1)}_{w_2} \vec{j} + \underbrace{(u_1 v_2 - u_2 v_1)}_{w_3} \vec{k}$$

$$\vec{w} = w_1 \vec{i} + w_2 \vec{j} + w_3 \vec{k}$$

El módulo de $\vec{w}$ está dado por $w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$, por tanto:

$$w^2 = (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)^2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)^2$$

expresión que puede expresarse como (demuéstalo):

$$w^2 = (u_1 + u_2 + u_3)^2 \cdot (v_1 + v_2 + v_3)^2 - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2 \quad (5.34)$$

Pero:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = u^2 \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = v^2$$

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = u v \cos \alpha$$

donde u y v son los módulos de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y α es el menor ángulo entre dichos vectores. Luego, (5.34) nos queda como:

$$w^2 = u^2 v^2 - (u v \cos \alpha)^2 = u^2 v^2 - u^2 v^2 \cos^2 \alpha$$

$$w^2 = u^2 v^2 (1 - \cos^2 \alpha) = u^2 v^2 \sin^2 \alpha$$

Finalmente:

$$w = |\vec{u} \times \vec{v}| = u v \sin \alpha \quad (5.35)$$

relación que establece que el módulo o magnitud del producto vectorial es igual al producto de los módulos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ por el seno del ángulo menor entre dichos vectores.

Ya vimos en la sección anterior que el vector $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. El producto vectorial puede ser uno de los dos posibles vectores mostrados en la fig. 5.2(a).

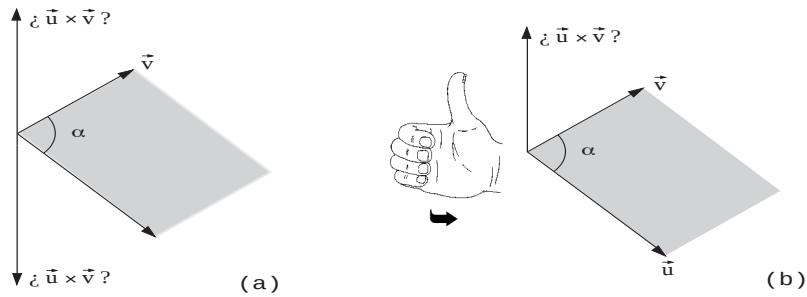


Fig. 5.2 (a) ¿Cuál de los dos vectores es $\vec{u} \times \vec{v}$? (b) La regla de la mano derecha determina la dirección de $\vec{u} \times \vec{v}$.

Para determinar la dirección de $\vec{u} \times \vec{v}$ se aplica la *regla de la mano derecha* que se ilustra en la fig. 5.2(b) y que se aplica de la manera siguiente: se cierran los dedos de la mano derecha desde el vector $\vec{u}$ hacia el vector $\vec{v}$ siguiendo el menor ángulo entre los mismos. El dedo pulgar indica la dirección de $\vec{u} \times \vec{v}$.

Los resultados obtenidos anteriormente permiten expresar al producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de la forma:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u v \operatorname{sen} \alpha) \vec{n} \quad (5.36)$$

donde $\vec{n}$ es un vector unitario perpendicular al plano formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

5.10 PROPIEDADES DEL PRODUCTO VECTORIAL

Las siguientes relaciones son válidas para el producto vectorial de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$1. \vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \quad (\text{La propiedad conmutativa no es válida}). \quad (5.37)$$

$$2. \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} \quad (5.38)$$

$$3. m(\vec{u} \times \vec{v}) = (m\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (m\vec{v}) \quad (m \text{ es un escalar}). \quad (5.39)$$

$$4. \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \quad (5.40)$$

$$5. \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad (5.41)$$

La demostración de las relaciones anteriores se deja como ejercicios al estudiante.

✱ EJEMPLO 5.17

Usando el producto vectorial, determina el ángulo entre los vectores:

$$\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad \vec{v} = -5\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

☆ Solución

Se tiene:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ -5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 11\vec{i} - 17\vec{j} + \vec{k} \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{11^2 + 17^2 + 1^2} = \sqrt{411} = 20,27$$

También:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = u v \operatorname{sen} \alpha$$

$$\text{Donde: } u = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14} = 3,74 \quad v = \sqrt{25+9+16} = \sqrt{50} = 7,07$$

Luego:

$$20,27 = 3,74 \times 7,07 \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{20,27}{26,44} = 0,77$$

Finalmente:

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(0,77) = 50,35^\circ$$

✱ EJEMPLO 5.18

Si $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, determina:

$$\text{a) } |\vec{u} \times \vec{v}| \quad \text{b) } |(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}| \quad \text{c) } (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

☆ Solución

$$\text{a) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1+6)\vec{i} - (3+4)\vec{j} + (9+2)\vec{k}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = 5\vec{i} - 7\vec{j} + 11\vec{k} \Rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{25+49+121} = 13,96$$

$$\text{b) } (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -7 & 11 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (14-33)\vec{i} - (-10-11)\vec{j} + (15+7)\vec{k}$$

$$-19\vec{i} - 21\vec{j} + 22\vec{k}$$

$$\left| (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \right| = \sqrt{361 + 441 + 484} = \sqrt{1.286} = 35,86$$

$$c) \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (5\vec{i} + 3\vec{j} + 11\vec{k}) \cdot (\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}) = (5 - 21 - 22) = -37$$

✱ EJEMPLO 5.19

Determina un vector de módulo unitario, perpendicular al plano que forman los vectores:

$$\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k} \qquad \vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

☆ Solución

El producto $\vec{u} \times \vec{v}$ nos da un vector perpendicular a $\vec{u}$ y a $\vec{v}$:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (5-6)\vec{i} - (-2-9)\vec{j} + (4+15)\vec{k} = -\vec{i} + 11\vec{j} + 19\vec{k}$$

Un vector unitario en la dirección de $\vec{u} \times \vec{v}$ se obtiene dividiendo $\vec{u} \times \vec{v}$ por su módulo. Si llamamos $\vec{n}$ a ese vector:

$$\vec{n} = \frac{-\vec{i} + 11\vec{j} + 19\vec{k}}{\sqrt{1 + 121 + 361}} = -\frac{1}{\sqrt{483}}\vec{i} + \frac{11}{\sqrt{483}}\vec{j} + \frac{19}{\sqrt{483}}\vec{k}$$

✱ EJEMPLO 5.20

Demuestra que el área de un paralelogramo cuyos lados son los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ está dada por $|\vec{A} \times \vec{B}|$.

☆ Solución

Considera el paralelogramo de la fig.

5.3 cuyos lados son los vectores $\vec{A}$ y

$\vec{B}$. El área del paralelogramo es:

$$S = h |\vec{B}|$$

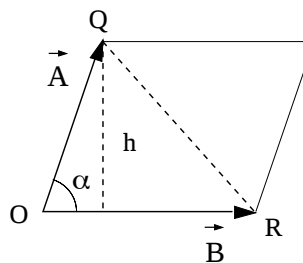


Fig. 5.3 Ejemplo 5.20: área de un paralelogramo.

Pero $h = |\vec{A}| \sin \alpha$ y sustituyendo en la expresión anterior:

$$S = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha = A B \sin \alpha$$

Pero $A B \sin \alpha = |\vec{A} \times \vec{B}|$, con lo que queda demostrado que el módulo del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ corresponde al área de un paralelogramo de lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Observa además que el área del triángulo de lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$, triángulo OQR en la fig. 5.3, es la mitad del área del paralelogramo. Es decir:

$$\text{Area del triángulo } OQR = \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

✱ EJEMPLO 5.21

Si $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$, demuestra que:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

☆ Solución

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2) \vec{i} - (v_1 w_3 - v_3 w_1) \vec{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{k}$$

Evaluemos $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}) \cdot [(v_2 w_3 - v_3 w_2) \vec{i} - (v_1 w_3 - v_3 w_1) \vec{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{k}]$$

$$= u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) - u_2(v_1 w_3 - v_3 w_1) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

expresión que corresponde al desarrollo por la primera fila del determinante:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

✱ Ejercicios

5.15 Determina el producto vectorial dados los vectores:

a) $\vec{u} = \langle 3, 1, 0 \rangle$ $\vec{v} = \langle -5, 4, -2 \rangle$ b) $\vec{u} = \langle -4, 10, -6 \rangle$ $\vec{v} = \langle 0, 3, 0 \rangle$

c) $\vec{u} = \langle -1, 1, 1 \rangle$ $\vec{v} = \langle -3, 0, 4 \rangle$ d) $\vec{u} = \langle 0, -6, -2 \rangle$ $\vec{v} = \langle 1, 4, 5 \rangle$

5.16 Determina un vector perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

a) $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ $\vec{v} = 4\vec{i} - 2\vec{k}$ b) $\vec{u} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$ $\vec{v} = 6\vec{k}$

5.17 Si $\vec{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\vec{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\vec{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$, demuestra las relaciones (5.37) a (5.41).

5.18 Determina el ángulo entre los vectores:

a) $\vec{u} = \langle -1, 2, 5 \rangle$ $\vec{v} = \langle 2, 0, -2 \rangle$ b) $\vec{u} = \langle 4, -3, 0 \rangle$ $\vec{v} = \langle 1, -3, 2 \rangle$

5.19 Si $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ y $\vec{C} = 5\vec{i} + 2\vec{k}$, determina:

a) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ b) $\left| (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) \right|$ c) $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C}$

d) $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$ e) $\left| (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \right| \times \vec{A}$ f) $\left| \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) \right|$

5.20 Determina el área de un paralelogramo de lados $\vec{A}$ y $\vec{B}$:

a) $\vec{A} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ $\vec{B} = \langle 1, 0, -2 \rangle$ b) $\vec{A} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ $\vec{B} = \vec{i} + \vec{j}$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

6.1 FORMA GENERAL DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

En las secciones (4.1.1) y (5.2) hicimos mención de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas cuya forma era la siguiente:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

que puede ser escrito en forma matricial de la manera:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

En general, un sistema puede tener m ecuaciones y n incógnitas, en cuyo caso podemos expresarlo como:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (6.1)$$

que puede escribirse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B \quad (6.2)$$

donde A : Matriz del sistema.

X : Matriz de las incógnitas.

B : Matriz de los términos independientes.

Tal como lo hemos definido, el número de ecuaciones y de incógnitas de un sistema de ecuaciones dependerá de los valores de m y n . Como ejemplos tenemos:

$5x - 3y + z = 0$	Número de ecuaciones: 3 $\Rightarrow m = 3$
$2x + y - z = 3$	Número de incógnitas: 3 $\Rightarrow n = 3$
$x - 4y = -2$	Sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas
$4x - y = 2$	Número de ecuaciones: 3 $\Rightarrow m = 3$
$x + y = 1$	Número de incógnitas: 2 $\Rightarrow n = 2$
$x - 4y = -3$	Sistema de 3 ecuaciones y 2 incógnitas
$x - 2y + z - 3w = 4$	Número de ecuaciones: 3 $\Rightarrow m = 3$
$2x + y - 5z + w = 2$	Número de incógnitas: 4 $\Rightarrow n = 4$
$5x - y + z - w = 0$	Sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas

Es el propósito de este capítulo determinar cuándo es posible hallar las soluciones a un sistema de m ecuaciones con n incógnitas.

6.2 SISTEMAS HOMOGÉNEOS Y NO HOMOGÉNEOS

Se dice que un sistema de ecuaciones es *homogéneo* si en la relación (6.2), la matriz B es igual a cero. Es decir:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$$

En este caso, el sistema de ecuaciones adopta la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Un sistema homogéneo siempre tiene como una de sus soluciones los valores:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

que es conocida como *solución trivial*. En general, para los sistemas homogéneos, nos interesan soluciones distintas a la trivial.

Ejemplo de un sistema homogéneo es el siguiente:

$$\begin{aligned}x + y + 3z &= 0 \\3x - y + 5z &= 0 \\4x - y + 7z &= 0\end{aligned}$$

donde todos los términos independientes son iguales a cero.

Un sistema de ecuaciones es *no homogéneo* si al menos uno de los términos independientes es distinto de cero. Como ejemplo de un sistema no homogéneo tenemos:

$$\begin{aligned}2x - y &= -3 \\4x + 2y + z &= 0 \\-x + 5y - z &= 1\end{aligned}$$

6.3 SISTEMAS COMPATIBLES E INCOMPATIBLES

Un sistema es *compatible* si tiene solución. Por el contrario, un sistema es *incompatible* si no tiene solución. Por ejemplo, el sistema:

$$\begin{aligned}x + y &= 5 \\x - y &= 1\end{aligned}$$

Es un sistema compatible, ya que admite la solución $x = 3, y = 2$ (compruébalo).

El sistema:

$$\begin{aligned}x - 2y &= 5 \\2x - 4y &= 4\end{aligned}$$

Es un sistema incompatible. Si intentáramos resolverlo por cualquier método elemental, encontraríamos una contradicción en el desarrollo. Por ejemplo, si multiplicamos la primera ecuación por 2, obtendríamos:

$$\begin{aligned}2x - 4y &= 10 \\2x - 4y &= 4\end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene un absurdo:

$$(2x - 2x) + (-4y + 4y) = 6 \Rightarrow 0 = 6$$

Geométricamente, un sistema de ecuaciones incompatible, como el dado anteriormente, corresponde a dos líneas rectas paralelas y, por tanto, no tienen ningún punto en común. En forma matricial el sistema anterior puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

El determinante del sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

De manera que si intentamos resolver para x y y , obtenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}}{0} \text{ (Indefinido)} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{0} \text{ (Indefinido)}$$

6.4 SISTEMAS DETERMINADOS E INDETERMINADOS

Un sistema de ecuaciones se dice que es *determinado* si tiene un número finito de soluciones. Por otra parte, si el número de soluciones es infinito, el sistema es *indeterminado*.

En un sistema indeterminado el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones. Así, el sistema:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 3x + 2y - z &= 1 \end{aligned}$$

consta de 2 ecuaciones y 3 incógnitas y puede admitir infinitas soluciones.

6.5 SISTEMAS DE ECUACIONES EQUIVALENTES

Dos sistemas de ecuaciones se dicen que son equivalentes si tienen la misma solución. Así, los sistemas:

$$\begin{aligned} x + y &= 0 & 5x - 2y &= 7 \\ 2x - 3y &= 5 & x - y &= 2 \end{aligned}$$

Son sistemas equivalentes, ya que ambos admiten la solución $x = 1, y = -1$.

El concepto de sistemas de ecuaciones equivalentes está íntimamente asociado al de matrices equivalentes estudiado en la sección 4.9. En este mismo sentido, se obtiene un sistema de ecuaciones equivalente a otro dado si:

- a) Se intercambian dos ecuaciones.
- b) Una ecuación se multiplica por una constante $k \neq 0$.
- c) Una ecuación se reemplaza por la suma de ella misma y cualquiera otra ecuación multiplicada por una constante real k .

Para ilustrar lo anterior, considera el sistema de ecuaciones:

$$3x - y + z = 2 \quad \textcircled{1}$$

$$7x + y - z = 8 \quad \textcircled{2}$$

$$2x - y + z = 1 \quad \textcircled{3}$$

Los siguientes sistemas son equivalentes al anterior:

$$\begin{array}{l} 7x + y - z = 8 \\ \text{a) } 3x - y + z = 2 \quad (\text{Se intercambiaron las ecuaciones } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2}) \\ 2x - y + z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - y + z = 2 \\ \text{b) } -7x - y + z = -8 \quad (\text{Se multiplicó la ecuación } \textcircled{2} \text{ por } -1) \\ 2x - y + z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 7x - 3y + 3z = 4 \\ \text{c) } 7x + y - z = 8 \quad (\text{Se sustituyó la primera ecuación por la suma de la misma más la tercera multiplicada por 2).} \\ 2x - y + z = 1 \end{array}$$

6.6 MATRIZ REDUCIDA. RANGO DE UNA MATRIZ.

Los conceptos de matriz reducida y rango de una matriz son de gran utilidad en el estudio de los sistemas de ecuaciones. En particular, el rango permite determinar cuándo un sistema es compatible o incompatible, determinado o indeterminado.

6.6.1 Matriz reducida: se define así a una matriz que cumple con las siguientes características.

- a. El primer elemento distinto de cero en cada fila es igual a 1. Los otros elementos de la columna donde se encuentra ese 1, son iguales a cero. La siguiente figura ilustra esta característica.

El primer elemento distinto de cero de la primera línea es 1.

El primer elemento distinto de cero de la segunda línea es 1.

El primer elemento distinto de cero de la tercera línea es 1.

Los otros elementos de la columna 3 son nulos

Los otros elementos de la columna 1 son nulos

b. Si una fila está formada sólo por ceros, debe estar colocada en la matriz por debajo de las filas que contienen un elemento distinto de cero. La ilustración que sigue muestra esta característica.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 ← Esta fila de ceros está por debajo de otra (0 0 1) que tiene un 1 en la tercera columna.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 ← Estas dos filas de ceros están por debajo de la primera fila que tiene un 1 en la segunda columna.

c. El primer elemento distinto de cero en cada fila está siempre a la derecha del primer elemento distinto de cero de la fila anterior. Así tenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 Este 1 de la segunda fila está a la derecha del 1 de la primera fila.

Este 1 de la tercera fila está a la derecha del 1 de la segunda fila.

La siguiente matriz no está en forma reducida porque viola las características a y b .

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

1. En las filas 1 y 3 los primeros elementos no nulos no son iguales a 1.

2. La fila 2, formada por elementos nulos, está por debajo de una fila que contiene dos elementos (2 y -3) distintos de cero.

6.6.2 Rango de una matriz: es el número de filas de la matriz reducida en las cuales no todos los elementos son nulos.

Para determinar el rango de una matriz, se utilizan operaciones elementales por filas, descrito en la sección 4.9, con el fin de obtener la matriz reducida.

✱ EJEMPLO 6.1

Determina la matriz reducida y el rango de:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

☆ Solución

Procederemos según los siguientes pasos:

Dividimos la fila 1 por 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 2 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la fila 1 por -2 y se la sumamos a la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -4 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la fila 2 por $-1/4$.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

Multiplicamos la fila 2 por $-1/2$ y se la sumamos a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

Esta última matriz está en forma reducida porque:

- a. El primer elemento no nulo de la primera y segunda filas es igual a 1.
- b. En las columnas 1 y 3, donde están los unos, los otros elementos son nulos.
- c. El 1 de la segunda fila está a la derecha del 1 de la primera fila.

Como hay dos filas en las cuales no todos los elementos son nulos, el rango de la matriz es 2.

✱ EJEMPLO 6.2

Determina el rango de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

☆ Solución

- a. Restamos la fila 1 a la fila 2 y a la fila 4 y sumamos la fila 1 a la fila 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- b. Dividimos la fila 2 por 2 y la fila 4 por 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- c. Sumamos la fila 2 a la fila 1 y a la fila 3. Restamos la fila 2 a la 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- d. Sumamos la fila 4 a la fila 2 y restamos la fila 3 de la 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz resultante es una matriz reducida. Hay tres filas en las cuales no todos los elementos son nulos y, por tanto, el rango es 3.

* Ejercicios

6.1 ¿Cuáles de las siguientes matrices son reducidas? Explica por qué.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{e)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{f)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{g)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\text{h)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6.2 Determina el rango de las siguientes matrices:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 6 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{c)} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\text{e)} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{f)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{g)} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 8 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{h)} \begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 1/2 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{i)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

6.7 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO HOMOGÉNEAS

En el capítulo 5 vimos cómo podría obtenerse la solución de un sistema de ecuaciones de n ecuaciones con n incógnitas. Se trataba, por supuesto, de sistemas con solución única y, por tanto, compatibles determinados. En esa oportunidad usamos dos métodos de solución: la regla de Cramer y el concepto de matriz inversa. Para la regla de Cramer consideremos un

sistema general de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (6.4)$$

El determinante del sistema, formado por los coeficientes de las incógnitas es:

$$\Delta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Los determinantes $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, obtenidos sustituyendo los términos independientes en las columnas 1, 2, ..., n de Δ , pueden escribirse como:

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

La solución del sistema está dada por:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} \quad (6.5)$$

Por otra parte, para usar el concepto de matriz inversa, expresamos el sistema 6.4 en la forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow A X = B \quad (6.6)$$

de donde podemos obtener la matriz X :

$$X = A^{-1}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Donde A^{-1} se obtiene invirtiendo la matriz de los coeficientes. La matriz inversa A^{-1} se calcula usando la fórmula (5.28):

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{\Delta} \quad (6.8)$$

donde $\text{adj } A$ es la matriz adjunta de los coeficientes. A manera de repaso, consideremos el siguiente ejemplo:

✱ EJEMPLO 6.3

Determina la solución del siguiente sistema de ecuaciones mediante: **a)** La regla de Cramer, **b)** La matriz inversa.

$$\begin{aligned} 2x - 2y + z &= 10 \\ -x + y - z &= -5 \\ 5x + 3y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

☆ Solución

a) El determinante del sistema es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2(3+3) + 1(-6-3) + 5(2-1) = 12-9+5=8 \Rightarrow \Delta=8$$

Los determinantes Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 son:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 10(3+3) + 5(-6-3) + 1(2-1) = 16 \Rightarrow \Delta_1 = 16$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(-15+1) + 1(30-1) + 5(-10+5) = -24 \Rightarrow \Delta_2 = -24$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 10 \\ -1 & 1 & -5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+15) + 1(-2-30) + 5(10-10) = 0 \Rightarrow \Delta_3 = 0$$

Luego:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{16}{8} = 2 \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-24}{8} = -3 \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{8} = 0$$

b) Para llegar a una igualdad como la (6.7), debemos determinar la matriz inversa, A^{-1} , a partir de (6.8). Para determinar la matriz adjunta, procedemos así:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -16$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Reemplazando a_{ij} por A_{ij} y determinando la matriz transpuesta:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -8 \\ 9 & 1 & -16 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Adj } A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -8 & -16 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz inversa es entonces:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{\Delta} = \frac{\begin{bmatrix} 6 & 9 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -8 & -16 & 0 \end{bmatrix}}{8} = \begin{bmatrix} 3/4 & 9/8 & 1/8 \\ -1/4 & 1/8 & 1/8 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

De forma que:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 9/8 & 1/8 \\ -1/4 & 1/8 & 1/8 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De la relación anterior se obtiene la solución del sistema:

$$x_1 = 2 \quad x_2 = -3 \quad x_3 = 0$$

Otro método de solución se basa en la reducción de matrices mediante operaciones elementales por filas, tal como fue tratado en la sección 4.9. Estas operaciones permiten simplificar el sistema de ecuaciones de manera que los valores de las incógnitas puedan determinarse fácilmente. Para aplicar el método, es necesario formar la matriz ampliada de los coeficientes, A^* , añadiendo a la matriz de los coeficientes una última columna formada por los elementos de la matriz de los términos independientes. Mediante las operaciones efectuadas sobre esta última matriz, se obtienen sistemas equivalentes con la misma solución del sistema original. El siguiente ejemplo ilustra el método.

✱ EJEMPLO 6.4

Determina la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 1 \\ 3x - y + 4z &= -12 \\ 6x + 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

☆ Solución

El sistema puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -12 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz ampliada es:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 3 & -2 & 4 & \vdots & -12 \\ 6 & 2 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

Los siguientes pasos conducen a la reducción del sistema:

a. Dividimos la fila 3 por 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 3 & -2 & 4 & \vdots & -12 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

b. Multiplicamos la fila 1 por 3 y el resultado se lo restamos a las filas 2 y 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & -5 & 10 & \vdots & -15 \\ 0 & -2 & 7 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

c. Dividimos la fila 2 por -5 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 3 \\ 0 & -2 & 7 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

d. Le restamos la fila 2 a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 3 \\ 0 & -2 & 7 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

e. Multiplicamos la fila 2 por 2 y el resultado se lo sumamos a la fila 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

f. Dividimos la fila 3 por 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & -2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

g. Multiplicamos la fila 3 por 2 y el resultado se lo sumamos a la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

El resultado anterior conduce al siguiente sistema equivalente con:

$$\begin{aligned} x + 0y + 0z &= -2 \\ 0x + y + 0z &= 5 \\ 0x + 0y + z &= 1 \end{aligned}$$

Del cual puede obtenerse inmediatamente la solución $x = -2$, $y = 5$, $z = 1$.

✱ EJEMPLO 6.5

Resuelve el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 24z &= 3 \\ x + 2y + 40z &= 0 \\ -2x + 6y - 16z &= -3 \end{aligned}$$

★ Solución

La matriz aumentada es:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -4 & 24 & \vdots & 3 \\ 1 & 2 & 40 & \vdots & 0 \\ -2 & 6 & -16 & \vdots & -3 \end{array} \right]$$

Seguiremos los siguientes pasos:

- a. Le restamos la fila 2 a la fila 1
y le sumamos la fila 1 a la fila 3.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -16 & \vdots & 3 \\ 1 & 2 & 40 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 8 & \vdots & 0 \end{array} \right]$$

- b. Dividimos la tercera fila por 2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -16 & \vdots & 3 \\ 1 & 2 & 40 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 0 \end{array} \right]$$

- c. Le restamos la fila 1 a la fila 2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -6 & -16 & \vdots & 3 \\ 0 & 8 & 56 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 0 \end{array} \right]$$

- d. Multiplicamos la fila 3 por 6 y el
resultado se lo sumamos a la fila
1.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & \vdots & 3 \\ 0 & 8 & 56 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 0 \end{array} \right]$$

- e. Multiplicamos la fila 3 por 8 y el
resultado se lo sumamos a la fila
2.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 24 & \vdots & -3 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 0 \end{array} \right]$$

- f. Dividimos la fila 2 por 3 y la
intercambiamos con la 3

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 8 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 8 & \vdots & -1 \end{array} \right]$$

- g. Le restamos la fila 3 a la fila 1
y dividimos la fila 3 por 8.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1/3 \end{array} \right]$$

h. Multiplicamos la fila 3 por -4 y el resultado se lo sumamos a la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1/8 \end{bmatrix}$$

Del resultado final se puede obtener la solución del sistema por simple inspección:

$$x = 4 \quad y = \frac{1}{2} \quad z = -\frac{1}{8}$$

* Ejercicios

6.3 Utiliza la regla de Cramer, la matriz inversa y reducción por filas para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & x - y + 3z = 2 \\ \text{a)} \quad & 2x + y - z = 2 \\ & -3x - 2y + 4z = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -5x + 2y - 4z = -5 \\ \text{b)} \quad & 6x - 3y + 9z = -12 \\ & x + y + z = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 2y = -3 \\ \text{c)} \quad & x + 3z = -7 \\ & + 4y + z = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y + z = 6 \\ \text{d)} \quad & 2x - y + z = 16 \\ & x + 2y - 3z = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 2y + 4z = 3 \\ \text{e)} \quad & -x + y - 2z = 1 \\ & 2x + 3y - 6z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x + y + z = 20 \\ \text{f)} \quad & x + 2y + 2z = 16 \\ & x + y + 2z = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x + 3y - 2z = 3 \\ \text{g)} \quad & 8x + y + z = 2 \\ & 2x + 2y + z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 3y + z = 0 \\ \text{h)} \quad & -2y + 4z = 1 \\ & -x + 3z = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x + y + 3z = 1 \\ \text{i)} \quad & x - y + 2z = 0 \\ & 3x - y + 5z = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3y - 2z = 2 \\ \text{j)} \quad & 4x + 5z = -1 \\ & 5x + y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 3x + 5y - z = 2 \\ \mathbf{k)} \quad x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3y - 2z = 2 \\ \mathbf{l)} \quad 4x + 5z = -1 \\ 5x + y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ \mathbf{m)} \quad 2x - y + 3z = 1 \\ 3x - 2y = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + 4y = 0 \\ \mathbf{n)} \quad 3x - 5z = 4 \\ 2y + z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y - 3z = -11 \\ \mathbf{o)} \quad 2x + y = 5 \\ -2w - x = -15 \\ 4z - w = -32 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -x + 2y + 4z + 3w = -6 \\ \mathbf{p)} \quad 2x - y + 3z + w = 6 \\ 3x - 2y - z + 4w = -1 \\ 4x + 3y - 5z - 4w = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} z + 4y = -7 \\ \mathbf{q)} \quad x + 2y = -3 \\ x + 3z = -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y - z = 12 \\ \mathbf{r)} \quad y + 4z - 2w = 1 \\ 3x + 5z + w = 18 \\ 2x + 3y - 4w = 5 \end{array}$$

6.8 ESTUDIO DE SISTEMAS DE ECUACIONES NO HOMOGÉNEOS

Como hemos visto, un sistema no homogéneo de ecuaciones puede expresarse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow AX = B$$

También hemos establecido que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas puede ser:

$$\mathbf{a. Compatible (Tiene solución)} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a.1 Determinado} (m = n) \\ \quad \text{(Una solución)} \\ \mathbf{a.2 Indeterminado} (m < n) \\ \quad \text{(Infinitas soluciones)} \end{array} \right.$$

b. Incompatible (No tiene solución)

Como método general para determinar la incompatibilidad de un sistema homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas, podemos establecer lo siguiente:

1. Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es compatible si y solamente si el rango de la matriz de los coeficientes (A) es igual al rango de la matriz ampliada (A^*); es decir, si:

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A^* \text{ (Sistema compatible)}$$

2. Si el sistema es compatible ($\text{Rango } A = \text{Rango } A^*$) y $m = n = \text{Rango } A$, es decir, si el número de ecuaciones es igual al de incógnitas e igual al rango, la solución del sistema es única:

$$m = n = \text{Rango } A \text{ (Solución única)}$$

3. Si el sistema es compatible ($\text{Rango } A = \text{Rango } A^*$) y el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas ($m < n$), las soluciones del sistema son infinitas:

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A^* \text{ y } m < n \text{ (Infinitas soluciones)}$$

4. Si $\text{Rango } A = \text{Rango } A^* = n$ y $n < m$, la solución del sistema es única:

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A^* = n \text{ y } n < m \text{ (Solución única)}$$

5. Si $\text{Rango } A = \text{Rango } A^* = r$ y $r < n$ (El rango es menor que el número de incógnitas), existen infinitas soluciones:

$$\text{Rango } A = \text{Rango } A^* = n \text{ y } n < m \text{ (Infinitas soluciones)}$$

6.8.1 *Sistemas de m ecuaciones con n incógnitas ($m = n$).*

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, donde $m = n$ (el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas), es compatible y determinado (con una sola solución) si el determinante Δ del sistema es distinto de cero.

Observemos las relaciones (6.5) y (6.8) ya establecidas:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \quad \dots \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad (6.5)$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj } A}{\Delta} \quad (6.8)$$

De estas relaciones se ve que si $\Delta = 0$, los valores de $x_1, x_2, \dots, x_n$ no están definidos.

Si $\Delta = 0$ y cualquiera de los determinantes $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ no es igual a cero, el sistema es incompatible.

✱ EJEMPLO 6.6

Determina si los siguientes sistemas son compatibles y encuentra su solución cuando sea posible:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \begin{array}{l} 6x + 3y = 5 \\ 2x + y = 2 \end{array} & \text{b)} \quad \begin{array}{l} x + y - 2z = -4 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{array} & \text{c)} \quad \begin{array}{l} x + y - 2z = -4 \\ -x - y + z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{array} \end{array}$$

☆ Solución

a) El determinante del sistema es: $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

Δ_1 y Δ_2 son iguales a:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2$$

Como $\Delta_1 \neq 0$ y $\Delta_2 \neq 0$:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{0} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{2}{0}$$

Como los valores de x_1 y x_2 no están definidos, el sistema no tiene solución y es, por tanto, incompatible.

b) El valor de Δ es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1-1) - 2(1+2) + 1(1-2) = -9$$

Como $\Delta \neq 0$, el sistema es compatible. Los valores de Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 son:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4(-1-1) - 5(1+2) + 2(1-2) = 8 - 15 - 2 = -9$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (5-2) - 2(-4+4) + (-4+10) = 3 + 6 = 9$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2-5) - 2(2+4) + (5-4) = -7 - 12 + 1 = -18$$

Luego:

$$x_1 = \frac{-9}{-9} = 1 \quad x_2 = \frac{9}{-9} = -1 \quad x_3 = \frac{-18}{-9} = 2$$

c) El determinante Δ es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1-1) + (1+2) + (1-2) = -2 + 3 - 1 = 0$$

Los valores de Δ_1 , Δ_2 y Δ_3 son los mismos de la parte (b) y todos son distintos de cero. Como $\Delta = 0$, el sistema es incompatible. Observa que la única diferencia entre los sistemas de ecuaciones de (a) y (b) es el coeficiente de x en la segunda ecuación que en el primer sistema es 2 y en el segundo -1.

La incompatibilidad de un sistema puede también evidenciarse al efectuar la reducción por filas del mismo. Cuando el sistema es incompatible, en una de las filas reducidas se obtiene una relación inconsistente, tal como $0 = 3$. A manera de ilustración, consideremos el sistema de ecuaciones del ejemplo 6.6 (c), el cual es incompatible y efectuemos operaciones elementales por filas sobre la misma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & \vdots & -4 \\ -1 & -1 & 1 & \vdots & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{array} \right] \quad (\text{Matriz aumentada})$$

- a) Le sumamos la fila 1 a la fila 2 y la fila 2 a la fila 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$$

- b) Multiplicamos la fila 2 por 2 y el resultado se lo sumamos a la fila 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & \vdots & -4 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 9 \end{bmatrix}$$

Del resultado anterior podemos escribir el sistema equivalente:

$$\begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & -4 \\ -z & = & 1 \\ 0 & = & 9 \end{array}$$

Como puedes ver, se obtuvo el absurdo $0 = 9$, lo que establece la incompatibilidad del sistema.

Finalmente, podemos hacer uso de la relación entre el rango de la matriz de los coeficientes (A) y de la matriz ampliada (A^*) para determinar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones. El siguiente ejemplo muestra el procedimiento.

✱ EJEMPLO 6.7

Usa el concepto de rango de una matriz para determinar la compatibilidad del siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & 2 \\ 3x & + & 2z = -2 \\ 2x - y + 3z & = & 3 \end{array}$$

☆ Solución

La matriz de los coeficientes es: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

A fin de determinar el rango de A , efectuaremos operaciones elementales

- Multiplicamos la primera fila por -3 y por -2 y sumamos esos resultados a las filas 2 y 3, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sumamos la fila 3 a la 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dividimos la segunda fila por 9.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos la segunda fila por 2 y por -3 y los resultados se los sumamos a las filas 1 y 3, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Le restamos la tercera fila a la primera.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz anterior está reducida por filas y su rango es 3.

Formemos ahora la matriz ampliada A^* y procedemos a reducirla por filas.

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & 2 \\ 3 & 0 & 2 & : & -2 \\ 2 & -1 & 3 & : & 3 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos la primera fila por -3 y por -2 y sumamos esos resultados a las filas 2 y 3, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 6 & -1 & : & -8 \\ 0 & 3 & 1 & : & -1 \end{bmatrix}$$

- Sumamos la fila 3 a la 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 9 & 0 & : & -9 \\ 0 & 3 & 1 & : & -1 \end{bmatrix}$$

- Dividimos la segunda fila por 9.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & : & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 3 & 1 & : & -1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos la segunda fila por 2 y por -3 y los resultados se los sumamos a las filas 1 y 3, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 \end{bmatrix}$$

- Le restamos la fila 3 a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz anterior es también 3 (¿Por qué?) y, por tanto, como $\text{Rango } A = \text{Rango } A^* = 3$, el sistema es compatible y su solución es única, ya que el rango es igual al número de incógnitas.

✱ EJEMPLO 6.8

Utiliza los tres métodos estudiados para demostrar la incompatibilidad del sistema:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ -x + 2y + z &= 3 \\ y + z &= 1 \end{aligned}$$

☆ Solución

- a) Método 1: Evaluación del determinante del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(2-1) + 1(1-2) = 1-1 = 0$$

Como $\Delta = 0$, el sistema es incompatible.

- b) Método 2: Aplicación del método de reducción por filas.

• La matriz aumentada del sistema es: $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ -1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$

• Le sumamos la fila 1 a la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 1 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

• Le restamos la fila 3 a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

• Dividimos la fila 2 por 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4/3 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

• Le restamos la fila 2 a la fila 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1/3 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz permite escribir el sistema:

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y + z &= 4/3 \\ 0 &= -1/3 \end{aligned}$$

que conduce al absurdo $0 = -1/3$, y hace al sistema incompatible

c) Método 3: Determinación del rango de A y A^* .

La matriz A es: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

• Le sumamos la fila 1 a la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• Dividimos la fila 2 por 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• Le restamos la fila 3 a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

• Le restamos la fila 2 a la fila 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz anterior es 2 (Rango $A = 2$).

Para determinar el rango de A^* , usamos el último resultado de la parte (b):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1/3 \end{bmatrix}$$

- Dividimos la fila 3 por $-\frac{1}{3}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos la fila 3 por $-\frac{4}{3}$ y el resultado se lo sumamos a la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz anterior está reducida por filas (¿Por qué?) y su rango es 3 (Rango $A^* = 3$). Como $\text{Rango } A \neq \text{Rango } A^*$, el sistema es incompatible.

✱ Ejercicios

6.4 En los siguientes ejercicios, establece la compatibilidad del sistema dado:

- Mediante la determinación del determinante Δ .
- Efectuando operaciones de reducción por filas.
- Determinando los rangos de la matriz de los coeficientes, A , y la matriz aumentada, A^* .

De ser el sistema compatible, encuentra su solución.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \begin{array}{l} 2x - 4y = 7 \\ 5x - 10y = -5 \end{array} & \begin{array}{l} \text{b)} \quad \begin{array}{l} 5x - 2y + z = 9 \\ x + y = 0 \\ x + 3y - 4z = -10 \end{array} \\ \text{c)} \quad \begin{array}{l} x + y + z = 12 \\ 3x - 2y = 7 \\ + 3y - 2z = 6 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} & \begin{array}{l} 3x + y + 6z = 6 \\ x + y + 2z = 2 \\ 2x + y + 4z = 3 \end{array} & \begin{array}{l} \text{e)} \quad \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ 4x + 2y + 3z = 1 \\ -2x + y + z = 2 \end{array} \\ \text{f)} \quad \begin{array}{l} 2x - y + z = 1 \\ 3x + 2z = -1 \\ 4x + y + 2z = 2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{g)} & \begin{array}{l} 3x - y + z = 1 \\ 7x + y - z = 6 \\ 2x + y - z = 2 \end{array} \\ \text{h)} & \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 4y + 2z = 14 \\ -x - y + 3z = 15 \end{array} \end{array}$$

6.8.2 *Sistemas en los cuales $m < n$.*

Si $m < n$, el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones y los sistemas adoptan formas tal como:

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 4 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned} \quad (m = 2, n = 3 \Rightarrow m < n)$$

Un sistema donde $m < n$ puede ser compatible o incompatible. Si el sistema es compatible es indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Para determinar si un sistema con $m < n$ es compatible, podemos usar los métodos de reducción por filas o de comparación de los rangos de la matriz de los coeficientes, A , y de la matriz ampliada, A^* .

Cuando el sistema tiene solución, es necesario fijar valores arbitrarios a una o varias de las incógnitas para obtener los valores de las otras.

✱ EJEMPLO 6.9

Dados los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= -3 \end{aligned} & \text{b)} \quad & \begin{aligned} 2x + y + w &= 2 \\ 3x + 3y + 3z + 5w &= 4 \\ 3x - 3z - 2w &= 3 \end{aligned} \end{aligned}$$

Determina su solución en caso de ser compatible.

☆ Solución

a) La matriz ampliada del sistema es: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$

• Intercambiamos las filas 1 y 2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & -3 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$

• Multiplicamos la fila 1 por -2 y el resultado se lo sumamos a la fila 2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & -3 \\ 0 & -1 & -3 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$

• Le sumamos la fila 2 a la fila 1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -3 & \vdots & 7 \end{bmatrix}$

La matriz anterior nos permite escribir el sistema:

$$\begin{aligned} x - z &= 4 \Rightarrow x = 4 + z \\ -y - 3z &= -7 \Rightarrow y = 7 - 3z \end{aligned}$$

A fin de determinar las soluciones del sistema, es necesario asignar valores arbitrarios a z . Así tenemos:

$$\begin{array}{ccc} z = 0 & \begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases} & z = 1 & \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases} & z = -1 & \begin{cases} x = 3 \\ y = 10 \end{cases} \end{array}$$

Como puedes ver, las soluciones del sistema son infinitas:

b) La matriz ampliada es: $A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & : & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & : & 4 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & : & 3 \end{bmatrix}$

- Le restamos la fila 3 a la fila 2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & : & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & : & 3 \end{bmatrix}$$

- Dividimos la fila 1 por 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & : & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & : & 1 \\ 3 & 0 & -3 & -2 & : & 3 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos la fila 1 por -3 y el resultado se lo sumamos a la fila 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & : & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & : & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 & -\frac{7}{2} & : & 0 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos la fila 3 por 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & : & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & : & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -7 & : & 0 \end{bmatrix}$$

- Le sumamos la fila 2 a la fila 3

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & : & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 \end{bmatrix}$$

La última fila de la matriz anterior conduce al absurdo $0 = 1$, por lo que el sistema es incompatible.

6.8.3 Sistemas en los cuales $m > n$.

Si $m > n$, el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas y los sistemas adoptan formas tal como:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 4 \\ x - y &= 1 \\ x + 5y &= -2 \end{aligned} \quad (m = 3, n = 2 \Rightarrow m > n)$$

Un sistema donde $m > n$ puede ser compatible o incompatible, condiciones que pueden determinarse por los métodos del rango o por reducción por filas. Si el sistema es compatible, puede ser determinado o indeterminado.

En particular, cuando se trata de m ecuaciones con $m - 1$ incógnitas, podemos afirmar lo siguiente:

Un sistema de m ecuaciones con $m - 1$ incógnitas, es compatible si el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes es igual a cero.

✱ EJEMPLO 6.10

Determina si los sistemas dados son compatibles y, en caso afirmativo, determina su solución.

$$\begin{aligned} & x - 2y - z = 1 \\ \text{a)} \quad & 3x + 5y + z = 0 \\ & 2x + 2y + z = 2 \\ & -3x + 6y + 3z = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - y = 5 \\ \text{b)} \quad & 2x - 3z = 2 \\ & 3x - 2y + z = 4 \\ & x + 3y = 1 \end{aligned}$$

☆ Solución

a) Se trata de un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. El determinante de los coeficientes y de los términos independientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

Dividiendo la última fila por -3 :

$$(-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Como el determinante anterior tiene dos filas iguales, su valor es igual a cero y, por tanto, el sistema es compatible. La matriz del sistema, una vez que se divide la última fila por -3 es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

• Multiplicamos la primera fila por -1 y el resultado se lo sumamos a la fila 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Como todos los elementos de la fila 4 son iguales a cero, la última ecuación es redundante y puede ser eliminada del sistema. La matriz que resulta es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Procedamos a reducir la matriz anterior:

• Multiplicamos la fila 1 por -3 y por 2 y los resultados se los sumamos a las filas 2 y 3, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 11 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

• Dividimos la fila 2 por 11 y la fila 3 por 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

• Le sumamos la fila 3 a la fila 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos la fila 2 por -2 y el resultado se los sumamos a la fila 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4/11 & -3/11 \\ 0 & 0 & 3/11 & 6/11 \end{bmatrix}$$

De la matriz anterior obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y + \frac{4}{11}z &= -\frac{3}{11} \\ \frac{3}{11}z &= \frac{6}{11} \end{aligned}$$

De la tercera ecuación: $z = 2$.

De la segunda ecuación: $y - \frac{3}{11} - \frac{8}{11} = -\frac{11}{11} = -1$.

La solución del sistema es: $x = 1$; $y = -1$; $z = 2$.

b) Se trata de un sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas. El determinante de los coeficientes de las incógnitas y de los términos independientes es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollemos el determinante por la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando los determinantes de tercer orden por las primeras columnas:

$$\begin{aligned} & 3[1 \cdot (-2 - 12) - 3 \cdot (-1 - 15) - 1 \cdot (-4 + 10)] + 1[1 \cdot (0 - 6) - 2 \cdot (-1 - 15) - 1 \cdot (-2 - 0)] \\ &= 3[-14 + 48 - 6] + 3[-6 + 32 - 2] = 3 \cdot 28 - 24 = 60 \end{aligned}$$

Como el valor del determinante es distinto de cero, el sistema es incompatible.

Otra forma de establecer la incompatibilidad del sistema es determinando los rangos de las matrices A y A^* . Para hallar esos rangos, procedemos a reducir las matrices A y A^* mediante operaciones elementales por filas:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \quad A^* = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Para la matriz A tenemos:

- Le restamos la fila 1 a la fila 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

- Multiplicamos la fila 1 por -2 y por -3 y el resultado se los sumamos a las filas 2 y 3, respectivamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

- Dividimos las filas 2, 3 y 4 por 2, 2 y 4, respectivamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Le sumamos la fila 4 a la fila 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

- Intercambiamos las filas 2 y 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

- Le restamos la fila 2 a las filas 3 y 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

- Dividimos las filas 3 y 4 por $\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{2}$, respectivamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

- Le restamos la fila 3 a la fila 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La matriz anterior está reducida por filas y como todos los elementos de la última fila son ceros, el rango de dicha matriz es igual a 3.

Procedemos a continuación a reducir la matriz A^* :

- Multiplicamos la primera fila por -2 , 3 y -1 y los resultados se los sumamos a las filas 2, 3 y 4, respectivamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

- Dividimos la segunda fila 2 y la fila 4 por 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

- Le sumamos la fila 4 a la fila 1 e intercambiamos la fila 4 con la fila 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -4 \end{vmatrix}$$

- Le restamos la fila 4 a la fila 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -4 \end{vmatrix}$$

- Le restamos la fila 2 a la fila 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & -7 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -3 \end{vmatrix}$$

- Multiplicamos la fila 3 por $\frac{3}{2}$ y el resultado se los sumamos a la fila 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{vmatrix}$$

- Dividimos la fila 4 por -18 .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

- Multiplicamos la fila 4 por -4 , 1 y 10 y los resultados se los sumamos a las filas 1, 2 y 3, respectivamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

La matriz anterior está reducida por filas y su rango es 4. Como $\text{Rango } A = 3$ y $\text{Rango } A^* = 4$, el sistema no tiene solución.

* Ejercicios

6.5 Determina si los siguientes sistemas de ecuaciones son compatibles. En caso afirmativo, encuentra al menos una solución.

a)
$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 3x + y - z &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x + y + w &= 2 \\ 3x + 3y + 3z + 5w &= 4 \\ 3x - 3z - 2w &= 3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x + y - z &= 2 \\ 6x + 2y - z &= -1 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x - w &= 4 \\ 2x - y &= 1 \\ x + 2y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} 3x - 4y - 2z &= 3 \\ -6x + 2y - z &= -1 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 4 \\ 2x - y - 2z + 3w &= 0 \\ x + 3y - z - 2w &= 1 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x - 2y + z + 2w &= -3 \\ x - 2y + z + 3w &= 5 \\ 2x - 4y + 2z + 4w &= -6 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z - w + 5t &= 0 \\ x - z + t &= -1 \end{aligned}$$

en el siguiente teorema:

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, con $m = n$, tiene una solución distinta a la trivial si el determinante de los coeficientes es igual a cero.

Si $m \neq n$, debemos tener en consideración lo siguiente:

1. El rango de un sistema homogéneo es igual al rango de la matriz de sus coeficientes.
2. Si el rango del sistema homogéneo es igual al número de incógnitas, la única solución es la trivial.
3. Si el rango del sistema homogéneo es menor que el número de incógnitas, las soluciones serán infinitas.

Cuando se buscan soluciones distintas a la trivial, el sistema resultante, luego de las reducciones adecuadas, es indeterminado y, por tanto, es necesario asignar valores arbitrarios a una de las incógnitas para poder determinar el valor de las otras. En todo caso, puede usarse el método de reducción por filas para determinar la solución.

✱ EJEMPLO 6.11

Determina si los sistemas homogéneos de ecuaciones tienen sólo solución trivial. Si no es así, determina la solución.

$$\begin{array}{ll}
 x - y + 2z = 0 & 6x - 3y + 4z = 0 \\
 \text{a) } 3x + y - z = 0 & \text{b) } x + 6y - 7z = 0 \\
 2x + 2y - 3z = 0 & 5x - 5y = 0
 \end{array}$$

☆ Solución

Como en ambos casos $m = n$, evaluaremos el determinante de los coeficientes:

$$\text{a) } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 1(-3+2) - 3(3-4) + 2(1-2) = 0$$

Como $\Delta = 0$, el sistema tiene solución distinta a la trivial. Para determinar las soluciones, efectuamos una reducción por filas en la matriz del sistema:

- Multiplicamos la primera fila por -3 y -2 y sumamos el resultado a las filas 2 y 3, respectivamente.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 4 & -7 \end{vmatrix}$$

- Le restamos la fila 2 a la fila 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La presencia de ceros en la tercera fila indica que la tercera ecuación ha sido eliminada.

- Dividimos la segunda fila por 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

- Le sumamos la fila 2 a la fila 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & -7/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La última matriz resultante es una matriz reducida y su rango es igual a 2. Como $\text{Rango } A = 2 < \text{número de incógnitas}$, se confirma que las soluciones son infinitas. El sistema reducido puede escribirse entonces como:

$$x + \frac{1}{4}z = 0$$

$$y - \frac{7}{4}z = 0$$

De donde:

$$y = \frac{7}{4}z \quad x = -\frac{1}{4}z$$

Dando valores a z , determinamos los de x y y . Así, por ejemplo:

$$z = 1 \Rightarrow y = \frac{7}{4} \quad x = -\frac{1}{4}$$

$$z = -2 \Rightarrow y = -\frac{7}{2} \quad x = \frac{1}{2}$$

b)
$$\begin{vmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 1 & 6 & -7 \\ 5 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 6(0 - 35) - 1(0 + 20) + 5(21 - 24) = -245$$

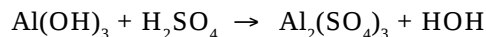
Como $\Delta \neq 0$, el sistema sólo admite la solución trivial $x = y = z = 0$. Esto supone que el rango de la matriz de los coeficientes es igual al número de incógnitas ($r = 3$). Para comprobarlo, efectuamos una reducción de la matriz:

- Intercambiamos las filas 1 y 2.
$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 \\ 6 & -3 & 4 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$
- Multiplicamos la fila 1 por -6 y -5 y los resultados se los sumamos a las filas 2 y 3, respectivamente.
$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 \\ 0 & -39 & 46 \\ 0 & -35 & 35 \end{bmatrix}$$
- Dividimos la fila 3 por -35 .
$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -7 \\ 0 & -39 & 46 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
- Multiplicamos la fila 3 por -6 y por 39 y los resultados se los sumamos a las filas 1 y 2, respectivamente.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 85 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
- Dividimos la fila 2 por -85 y luego intercambiamos las filas 2 y 3.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- Multiplicamos la fila 3 por 13 y por -1 y los resultados se los sumamos a las filas 1 y 2, respectivamente.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

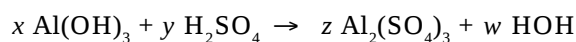
La matriz anterior está reducida y su rango es $r = 3$. Como $r = n = 3$, la única solución posible es la trivial.

6.10 BALANCEO DE ECUACIONES QUÍMICAS MEDIANTE ECUACIONES HOMOGÉNEAS

Uno de los problemas clásicos de química es el balanceo de ecuaciones tales como:



Balancear la ecuación química significa obtener coeficientes en las sustancias que intervienen en dicha reacción de manera que queden igualadas tanto la masa como la carga. En el caso anterior escribiríamos:



En la ecuación balanceada la cantidad de cada elemento del lado izquierdo debe ser igual a la de ese mismo elemento del lado derecho. Así tenemos:

$$\begin{array}{ll} \text{Aluminio (Al):} & x = 2z \\ \text{Oxígeno (O):} & 3x + 4y = 12z + w \\ \text{Hidrógeno (H):} & 3x + 2y = 2w \\ \text{Azufre (S):} & y = 3z \end{array}$$

El sistema resultante puede escribirse como:

$$\begin{array}{rrrrr} x & & -2z & & = 0 \\ 3x & + & 4y & -12z & -w = 0 \\ 3x & + & 2y & & -2w = 0 \\ & & y & -3z & = 0 \end{array}$$

que puede escribirse matricialmente como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -12 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Procedemos a reducir la matriz de los coeficientes:

• Multiplicamos la fila 1 por -3 y el resultado se lo sumamos a las filas 2 y 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

• Dividimos la fila 3 por 2 e intercambiamos las filas 2 y 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Le restamos la fila 2 a la fila 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

- Dividimos la fila 4 por -6 e intercambiamos las filas 3 y 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 4 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos la fila 2 por -4 y el resultado se lo sumamos a la fila 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -18 & 3 \end{bmatrix}$$

- Multiplicamos la fila 3 por 18 y el resultado se lo sumamos a la fila 4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como la última fila tiene todos sus elementos iguales a cero, se ha eliminado una ecuación. El sistema resultante es:

$$\begin{array}{rcl} x - 2z & = & 0 \quad 1 \\ y + 3z - w & = & 0 \quad 2 \\ z - \frac{1}{6}w & = & 0 \quad 3 \end{array}$$

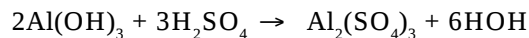
De las ecuaciones 1 y 3: $x = 2z$ $w = 6z$

De la ecuación 2: $y = w - 3z = 6z - 3z \Rightarrow y = 3z$

Si hacemos $z = 1$, una solución es:

$$x = 2 \quad y = 3 \quad z = 1 \quad w = 6$$

y la ecuación balanceada toma la forma:



* Ejercicios

6.7 Determina la solución de cada uno de los siguientes sistemas homogéneos. Cuando dicha solución sea no trivial, determina al menos una de ellas.

$$\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 0 \\ \text{a)} \quad x + 4z = 0 \\ 6y + 5z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 0 \\ \text{b)} \quad 2x + 4y - 6z = 0 \\ x + 10y - 15z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x + y = 0 \\ \text{c)} \quad x - 2y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ \text{d)} \quad -4x + 2y + z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4x - 2y + 2z + w = 0 \\ \text{e)} \quad 2x - y - 3z - w = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ \text{f)} \quad x + 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{array}$$

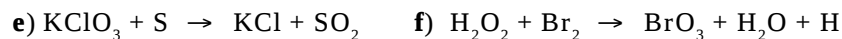
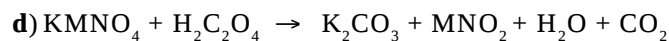
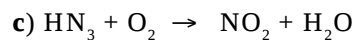
$$\begin{array}{l} 6x - 2y + 2z = 0 \\ \text{g)} \quad -x + 3y - z = 0 \\ 2x + 7y = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y + z + w = 0 \\ \text{h)} \quad x - y + z + w = 0 \\ x - y - z + w = 0 \\ x - y - z - w = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - y + 2z = 0 \\ \text{i)} \quad 3x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x - y + z + w = 0 \\ 3x + y + w = 0 \\ \text{j)} \quad 2x + 2z + w = 0 \\ 4x - 2y - z - w = 0 \\ 5x - y - 2z = 0 \end{array}$$

6.8 Balancea las siguientes ecuaciones químicas mediante el uso de sistemas de ecuaciones homogéneas:



POLINOMIOS

7.1 REVISIÓN DE CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE POLINOMIOS

Una función polinómica de la variable x puede expresarse de la manera siguiente:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (7.1)$$

El segundo término de la relación anterior dado por:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (7.2)$$

recibe el nombre de *polinomio*. A los sumandos de la relación (7.2) se les denomina *términos*. Entonces,

$$a_n x^n, a_{n-1} x^{n-1}, a_{n-2} x^{n-2}, \dots, a_2 x^2, a_1 x, a_0$$

son los términos del polinomio. $a_n x^n$ es el término de grado n y a_0 es el término de grado cero o término independiente.

El *grado de un polinomio* es el mayor exponente al cual aparece elevada la variable x .

Como ejemplos de polinomios tenemos:

$3x^3 - 2x^2 + 7x - 4$ (Polinomio de tercer grado, 4 términos y término independiente igual a -4).

$5x^7 - 3x^4 + 2x + 1$ (Polinomio de séptimo grado, 4 términos y término independiente igual a 1).

Observa que el último polinomio carece de los términos de grados 6, 5, 3 y 2 y, por tanto, puede escribirse como:

$$5x^7 + 0x^6 + 0x^5 - 3x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x + 1$$

En el curso de octavo grado habíamos hablado de polinomios de $\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}$.

Tales polinomios tomaban formas tal como:

$$\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - \frac{1}{8}$$

donde los coeficientes pertenecían a $\mathbf{Q}$. En este curso consideraremos polinomios con coeficientes reales (en R) y coeficientes complejos (en C). Es decir, polinomios que pueden adoptar formas tales como:

$$\sqrt{2}x^2 - 3x - 1 \quad z^3 + 3iz^2 + (3 + 4i)z - 3$$

Es usual utilizar la variable z para polinomios en C , en cuyo caso una función polinómica de grado n puede escribirse:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (7.3)$$

Es importante recordar que un polinomio en C reúne las siguientes características:

- a.** Cada término es el producto de un número complejo por una potencia de la variable z .
- b.** El exponente de la variable z es un número natural.
- c.** Los términos que forman el polinomio están enlazados por operaciones de adición y sustracción.

Las siguientes funciones no son polinómicas, por no poder representarse de acuerdo con las características anteriores:

$$f(x) = 3x^2 - \frac{1}{5}x^{-1} + 1 \quad (\text{El exponente de } x \text{ no es un número natural})$$

$$f(x) = 5z^3 + \frac{3z-1}{4z^2+2} - 8 \quad (\text{El segundo término es una fracción en } z \text{ que envuelve una operación de división})$$

7.2 ADICIÓN DE POLINOMIOS

Para efectuar la adición de polinomios se efectúa la suma de los términos semejantes. Los términos semejantes son aquellos que tienen el mismo grado. Si:

$$f(z) = 3iz^3 - (2 - i)z^2 - 5 \quad g(z) = z^4 + 2z^3 - 4iz^2 + z + 6$$

el polinomio suma, que denotaremos por $S(z)$ será:

$$S(z) = f(z) + g(z) = 3iz^3 - (2 - i)z^2 - 5 + z^4 + 2z^3 - 4iz^2 + z + 6$$

Agrupando términos semejantes:

$$S(z) = z^4 + (3i + 2)z^3 + [-(2 - i) - 4i]z^2 + z + (6 - 5)$$

Finalmente:

$$S(z) = z^4 + (3i + 2)z^3 + (2 - 3i)z^2 + z + 1$$

7.3 MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Dados los de polinomios:

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

$$Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + b_{m-2} z^{m-2} + \dots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0$$

El producto $P(z) \cdot Q(z)$ se obtiene multiplicando cada término de $P(z)$ por todos los términos de $Q(z)$ y luego sumando los productos parciales resultantes. La multiplicación de polinomios se efectúa mediante la propiedad distributiva.

Considera los polinomios:

$$P(z) = z^2 - 3iz + 1 \quad Q(z) = 2iz^3 - (1 + i)z^2 - 1$$

El producto $P(z) \cdot Q(z)$ está dado por:

$$P(z) \cdot Q(z) = (z^2 - 3iz + 1) \cdot [2iz^3 - (1 + i)z^2 - 1]$$

$$= 2iz^5 - (1 + i)z^4 - z^2 - (3i)(2i)z^4 + 3i(1 + i)z^3 + 3iz + 2iz^3 - (1 + i)z^2 - 1$$

$$= 2iz^5 - [(1 + i) - 6]z^4 + (-3 + 3i + 2i)z^3 - (1 + 1 + i)z^2 + 3iz - 1$$

$$= 2iz^5 - (-5 + i)z^4 + (-3 + 5i)z^3 - (2 + i)z^2 + 3iz - 1$$

Donde se ha usado el producto $i \cdot i = i^2 = -1$.

7.4 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Esta operación también fue estudiada en el curso de 8º grado. Dado un polinomio $D(z)$, llamado *dividendo*, y otro polinomio $d(z)$ de grado igual o menor al de $D(z)$, y llamado *divisor*, la división de polinomios $D(z) \div d(z)$ obedece a la siguiente relación:

$$D(z) = d(z) \cdot C(z) + R(z) \quad (7.3)$$

donde $C(z)$ es el polinomio *cociente* y $R(z)$ es el polinomio *residuo* o resto. El grado del cociente, $C(z)$, es menor que el grado del dividendo, $D(z)$, y el grado del residuo, $R(z)$, es menor que el grado del divisor, $d(z)$.

Cuando $R(z) = 0$, la división es exacta y (7.3) puede escribirse como:

$$D(z) = d(z) \cdot C(z) \quad (7.4)$$

En este último caso, se dice que $D(z)$ es *divisible* por $d(z)$ o que $D(z)$ es un *múltiplo* de $d(z)$. Puede también decirse que el polinomio $d(z)$ es un *divisor* del polinomio $D(z)$. El siguiente ejemplo muestra la manera de efectuar la división.

✱ EJEMPLO 7.1

Efectúa las siguientes divisiones:

a) $(30x^3 + 34x - 26x^2 - 6) \div (10x - 2)$ **b)** $(x^7 + 2x^5 - 3x + 4) \div (x^5 + 3x)$

☆ Solución

a)

$$\begin{array}{r}
 30x^3 - 26x^2 + 34x - 6 \quad \Big| \quad 10x - 2 \\
 - 30x^3 + \quad 6x^2 \\
 \hline
 - 20x^2 + 34x \\
 + 20x^2 - \quad 4x \\
 \hline
 30x - 6 \\
 - 30x + 6 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Como el residuo es cero, la división es exacta y podemos escribir:

$$30x^3 + 34x - 26x^2 - 6 = (10x - 2)(3x^2 - 2x + 3)$$

b)

$$\begin{array}{r}
 x^7 + 0x^6 + 2x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 3x + 4 \quad \Big| \quad x^5 + 3x \\
 \underline{-x^7} \qquad \qquad \qquad \underline{-3x^3} \qquad \qquad \qquad x^2 + 2 \\
 2x^5 + 0x^4 - 3x^3 \qquad \qquad \qquad -3x + 4 \\
 \underline{-2x^5} \qquad \qquad \qquad \underline{-6x} \\
 -3x^3 \qquad \qquad \qquad -9x + 4
 \end{array}$$

Como el residuo no es igual a cero, la división es inexacta y el residuo es $-3x^3 - 9x + 4$. Podemos escribir:

$$x^7 + 2x^5 - 3x + 4 = (x^5 + 3x)(x^2 + 2x) - 3x^3 - 9x + 4$$

7.5 VALOR NUMÉRICO Y CEROS DE UN POLINOMIO

El *valor numérico*, $P(a)$, de un polinomio $P(z)$ es el valor que se obtiene al sustituir z por un número cualquiera $a \in \mathbb{C}$.

Más estrictamente diremos que, dado un polinomio $P(z)$ y un número $a \in \mathbb{C}$, $P(a)$ es la imagen de $P(z)$ para $z = a$.

✱ EJEMPLO 7.2

Determina el valor numérico de $P(z) = 2z^2 - 5z + 1$ para los números indicados:

a) $z = \frac{1}{2}$

b) $z = \sqrt{2}$

c) $z = 3 - 2i$

☆ Solución

a) $z = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 1 = -1$

b) $z = \sqrt{2} \Rightarrow P(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^2 - 5 \cdot \sqrt{2} + 1 = 5 - 5\sqrt{2} = 5(1 - \sqrt{2})$

c) $z = 3 - 2i \Rightarrow P(3 - 2i) = 2(3 - 2i)^2 - 5(3 - 2i) + 1 =$

$$\begin{aligned}
 &= 2(9 - 12i - 4) - 5(3 - 2i) + 1 = \\
 &= 2(5 - 12i) - 15 + 10i + 1 = \\
 &= 10 - 24i - 15 + 10i + 1 = -14i - 4
 \end{aligned}$$

Dado un polinomio $P(z)$, se denominan *ceros* del mismo a aquellos valores de z que lo anulan. En general, un cero de un polinomio es un número complejo. A los ceros también se les conoce como *raíces* del polinomio.

✱ EJEMPLO 7.2

Determina si los números dados son ceros de los polinomios $P(z)$.

$$\text{a) } P(z) = z^3 - 3z^2 - 13z + 15 \quad z = -3; \quad z = 2$$

$$\text{b) } P(z) = z^2 - (3 + i)z + (2 + 2i) \quad z = 1; \quad z = 2; \quad z = 1 + i$$

☆ Solución

$$\text{a) } z = -3 \Rightarrow P(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 - 13 \cdot (-3) + 15 = -27 - 27 + 39 + 15 = 0$$

Luego, -3 es un cero de $P(z)$.

$$z = 2 \Rightarrow P(2) = (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 - 13 \cdot 2 + 15 = 8 - 12 - 26 + 15 = -15 \neq 0$$

Luego, 2 no es un cero de $P(z)$.

$$\text{b) } z = 1 \Rightarrow P(1) = 1^2 - (3 + i) \cdot 1 + 2 + 2i = 1 - 3 - i + 2 + 2i = i \neq 0$$

Luego, 1 no es un cero de $P(z)$.

$$z = 2 \Rightarrow P(2) = 2^2 - (3 + i) \cdot 2 + 2 + 2i = 4 - 6 - 2i + 2 + 2i = 0$$

Luego, $z = 2$ es una raíz de $P(z)$.

$$\begin{aligned}
 z = (1 + i) \Rightarrow P(1 + i) &= (1 + i)^2 - (3 + i)(1 + i) + 2 + 2i = \\
 &= 1 + 2i + i^2 - 3 - 4i + 1 + 2 + 2i = \\
 &= (1 - 1 - 3 + 1 + 2) + (2 - 4 + 2)i = 0
 \end{aligned}$$

Luego, $z = 1 + i$ es una raíz de $P(z)$.

* Ejercicios

7.1 Establece cuál de las siguientes expresiones son polinomios en z :

- a)** $3x^3 + 3x^2 - \pi$ **b)** $8x^5 - \sqrt{2}x + \frac{1}{x}$ **c)** $ix^2 + 2x - 4i$
d) $2x^{-2} + x + 1$ **e)** $\sin(z + 1) - z + 1$ **f)** $3z^5 + 2z - (2 + i)$

7.2 Dados los polinomios:

$$P(z) = 3iz^3 + 2z^2 - 4 \quad M(z) = z^2 - 2iz + 1 \quad Q(z) = z - i$$

determina:

- a)** $P(z) + M(z) - Q(z)$ **b)** $P(z) \cdot Q(z) + M(z)$
c) $P(z) \div M(z)$ **d)** $[P(z) \cdot Q(z)] \div M(z)$

7.3 Determina el valor numérico del polinomio para el número dado:

- a)** $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + x + 2$ $x = -3$
b) $P(w) = w^3 - 6w^2 + 7$ $w = -1$
c) $P(z) = z^3 - 2z^2 + z - 2$ $z = i$
d) $P(z) = 2iz^3 + (1 - i)z^2 + i$ $z = 2$
e) $P(z) = z^4 - 3z^3 + 3z^2 + z - 2$ $z = 1 - i$

7.4 Establece si los números dados son raíces de los polinomios:

- a)** $P(x) = x^3 - 7x - 6$ $x = 2$
b) $f(x) = 2x^3 - x^2 - 6x + 3$ $x = \sqrt{3}$
c) $Q(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$ $z = 1 + i$
d) $f(z) = z^3 - 5z^2 + 7z + 13$ $z = 3 + 2i$
e) $R(r) = r^4 - 4r^3 + r^2 + 28r - 56$ $r = 1$
f) $N(x) = 3x^3 - 7x^2 - x + 1$ $x = 1 - \sqrt{2}$

7.6 DIVISIBILIDAD DE UN POLINOMIO POR $z - a$. TEOREMA DEL RESIDUO.

Consideremos el polinomio $D(z) = 2z^3 - z^2 + 2z + 3$ y efectuemos su división por el binomio $d(z) = z - 2$:

$$\begin{array}{r|l}
 2z^3 - z^2 + 2z + 3 & z - 2 \\
 -2z^3 + 4z^2 & 2z^2 + 3z + 8 \\
 \hline
 3z^2 + 2z & \\
 -3z^2 + 6z & \\
 \hline
 8z + 3 & \\
 -8z + 16 & \\
 \hline
 19 &
 \end{array}$$

El cociente es el polinomio $C(z) = 2z^2 + 3z + 8$ y el residuo es $R(z) = 19$. Podemos escribir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 2z^3 - z^2 + 2z + 3 & = & (z - 2)(2z^2 + 3z + 8) & + & 19 \\
 \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
 D(z) & & d(z) & & C(z) & & R(z)
 \end{array}$$

Observa que el grado del divisor $(z - 2)$ es uno y que el residuo (19) es de grado cero, un grado menor que el divisor.

Ahora bien, si evaluamos el polinomio $C(z)$ para $z = 2$, obtenemos:

$$C(2) = 2 \cdot 2^2 - 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 16 - 4 + 4 + 3 = 19$$

que corresponde exactamente al residuo de la división anterior. Este resultado no es una simple coincidencia como lo establece el siguiente teorema:

Teorema del Residuo: Sea $D(z)$ un polinomio en C de grado n y a un número complejo. Entonces, existe otro polinomio $d(z)$ con grado $n - 1$ y un número complejo R tales que:

$$D(z) = (z - a) \cdot d(z) + R \quad D(a) = R \quad (7.5)$$

Prueba: Dividir $D(z)$ por $(z - a)$ significa determinar un cociente $d(z)$ y un residuo $R(z)$, tal que:

$$D(z) = (z - a) \cdot d(z) + R(z) \quad (7.6)$$

Como el grado del divisor $(z - a)$ es 1, el residuo $R(z)$ debe ser igual a cero o de grado cero. En cualquiera de los dos casos es una constante que denotaremos por R . Luego, (7.6) puede ser escrita como:

$$D(z) = (z - a) \cdot d(z) + R \quad (7.7)$$

Si evaluamos (7.7) para $z = a$:

$$D(a) = (a - a) \cdot d(z) + R$$

Luego:

$$D(a) = R \quad (7.8)$$

Expresión que establece que el residuo que resulta al dividir un polinomio $P(z)$ por $z - a$, se obtiene sustituyendo a en $P(z)$.

✱ EJEMPLO 7.4

Determina el residuo de la división del polinomios $D(z)$ por los binomios dados. Comprueba los resultados efectuando las divisiones correspondientes:

$$\text{a) } D(z) = z^4 + 2z^3 - 3z^2 - z \quad d(z) = z - 5$$

$$\text{b) } D(z) = z^2 - 6z + 13 \quad d(z) = z - (3 - 2i)$$

☆ Solución

$$\text{a) Haciendo } z = 5: \quad D(5) = 5^4 + 2 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 5 = 625 + 250 - 75 - 5 = 795$$

Luego, $R = 795$. Efectuando la división:

$$\begin{array}{r}
 z^4 + 2z^3 - 3z^2 - z \quad \Bigg| \quad z - 5 \\
 \underline{- z^4 + 5z^3} \\
 7z^3 - 3z^2 - z \\
 \underline{- 7z^3 + 35z^2} \\
 32z^2 - z \\
 \underline{- 32z^2 + 160z} \\
 159z \\
 \underline{- 159z + 795} \\
 795
 \end{array}$$

que comprueba que $R = 795$.

b) Haciendo $z = 3 - 2i$:

$$D(3 - 2i) = (3 - 2i)^2 - 6(3 - 2i) + 13 = 9 - 12i - 4 - 18 + 12i + 13 = 0$$

Luego: $R = 0$. Efectuando la división:

$$\begin{array}{r} z^2 - 6z + 13 \quad | \quad z - (3 - 2i) \\ - z^2 + (3 + 2i)z \quad \quad z - (3 + 2i) \\ \hline - (3 - 2i)z + 13 \\ + (3 - 2i)z - 13 \\ \hline 0 \end{array}$$

Nuevamente se obtuvo $R = 0$. Nota que el producto $(3 - 2i)(3 + 2i) = 13$.

Ya vimos que en la división de un polinomio $D(z)$ por el monomio $(z - a)$ permite escribir la expresión:

$$D(z) = (z - a) \cdot d(z) + R$$

Si $R = 0$, la división es exacta y se dice que $D(z)$ es divisible por $z - a$. En este caso, $D(a) = R = 0$ y podemos enunciar el siguiente teorema:

Teorema de la Factorización: Si $D(z)$ es un polinomio complejo, $P(a) = 0$ si y solamente si $(z - a)$ es un factor de $P(z)$.

El teorema anterior implica que $P(z)$ es divisible por $z - a$ y puede escribirse como:

$$P(z) = (z - a) \cdot Q(z)$$

donde $Q(z)$ es de un grado menor que $P(z)$. $z = a$ es un cero de $P(z)$.

✱ EJEMPLO 7.5

a) Determina si $(x - 4)$ es un factor del polinomio $P(x) = x^3 + 8x^2 + 8x - 32$.

b) Demuestra que $(x - 3i)$ es un factor del polinomio $P(x) = x^3 - x^2 + 9x - 9$.

★ Solución

a) Si $(x - 4)$ es un factor de $P(x)$, $P(4) = 0$. Veamos:

$$P(4) = 4^3 + 8 \cdot 4^2 + 8 \cdot 4 - 32 = 64 + 128 + 32 - 32 = 192 \neq 0$$

Como $P(4) \neq 0$, $(x - 4)$ no es un factor de $x^3 + 8x^2 + 8x - 32$.

b) Determinemos el valor de $P(3i)$:

$$P(3i) = (3i)^3 - (3i)^2 + 9 \cdot (3i) - 9 = 27i^3 - 9i^2 + 27i - 9 = 0$$

Como $P(3i) = 0$, $(z - 3i)$ es un factor de $x^3 - x^2 + 9x - 9$.

7.8 DIVISIÓN SINTÉTICA (REGLA DE RUFFINI)

La división sintética es un proceso que simplifica la división de un polinomio por un binomio de la forma $z - a$. Ilustraremos el método dividiendo el polinomio $2z^4 + 5z^3 - 23z^2 - 38z + 24$ por $z - 3$ en la forma ya conocida y luego mostraremos cómo la división sintética o *Regla de Ruffini* permite simplificar la operación:

$$\begin{array}{r|l}
 \textcircled{2}z^4 + 5z^3 - 23z^2 - 38z + 24 & z - 3 \\
 - \textcircled{2}z^4 + 6z^3 & \textcircled{2}z^3 + \textcircled{11}z^2 + 10z - 8 \\
 \hline
 \textcircled{11}z^3 - 23z^2 & \\
 - \textcircled{11}z^3 + 33z^2 & \\
 \hline
 10z^2 - 38z & \\
 - 10z^2 + 30z & \\
 \hline
 - 8z + 24 & \\
 8z - 24 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Observa que el número 2, que es el primer coeficiente del cociente, también es el primer coeficiente del dividendo y que aparece escrito tres veces (círculo continuo). Igualmente, el número 11 aparece tres veces (círculo discontinuo). Esto se repite para los números 10 y 8. Parece escribir, pues, cierta redundancia en el proceso anterior.

Para aplicar la regla de Ruffini, se ordenan los coeficientes del dividendo y el término independiente del divisor cambiado de signo de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 5 & -23 & -38 & 24 \\
 3 & & & & &
 \end{array}
 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{Coeficientes del} \\ \text{dividendo} \end{array}$$

Término independiente del divisor $\rightarrow 3$

- Luego copiamos el primer coeficiente del dividendo (2) debajo de la línea horizontal y alineado verticalmente con dicho coeficiente:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 5 & -23 & -38 & 24 \\
 3 & & & & & \\
 \hline
 & 2 & & & &
 \end{array}$$

- Multiplicamos 3 por 2 y el resultado (6) lo colocamos debajo del 5. Luego sumamos 5 y 6 para obtener el segundo coeficiente del cociente:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 5 & -23 & -38 & 24 \\
 3 & & 6 & & & \\
 \hline
 & 2 & 11 & & &
 \end{array}$$

- Efectuamos la multiplicación $3 \cdot 11$ y el resultado (33) lo colocamos debajo de -23 , al cual se lo sumamos:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 5 & -23 & -38 & 24 \\
 3 & & 6 & 33 & & \\
 \hline
 & 2 & 11 & 10 & &
 \end{array}$$

- Efectuamos la multiplicación $3 \cdot 10$ y el resultado se lo sumamos a -38 :

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 5 & -23 & -38 & 24 \\
 3 & & 6 & 33 & 30 & \\
 \hline
 & 2 & 11 & 10 & -8 &
 \end{array}$$

- Multiplicamos 3 por -8 y el resultado se lo sumamos a 24:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 5 & -23 & -38 & 24 \\
 3 & & 6 & 33 & 30 & -24 \\
 \hline
 & 2 & 11 & 10 & -8 & 0
 \end{array}$$

Observa que hemos obtenido debajo de la línea horizontal los coeficientes del polinomio del cociente que anteriormente obtuvimos mediante el método no sintético. El último resultado debajo de la línea horizontal, cero, corresponde al residuo. Como sabemos que el cociente es de un orden menor que el dividendo (orden 4), los resultados obtenidos debajo de la línea, de izquierda a derecha, representan los coeficientes de potencias de orden 3, 2, 1 y 0. Luego:

$$(2z^4 + 5z^3 - 23z^2 - 38z + 24) \div (z - 3) = 2z^3 + 11z^2 + 10z - 8$$

En este ejemplo, $R = 0$.

La regla de Ruffini puede resumirse de la siguiente manera:

1. Para aplicar el método, es necesario ordenar los términos del polinomio dividendo de mayor a menor grado. Cuando alguno de estos términos no exista, se coloca un cero en el lugar que ocuparía.
2. El grado del cociente es una unidad menor que el grado del dividendo.
3. El coeficiente del primer término del cociente es igual al coeficiente del primer término del dividendo.
4. El coeficiente de cualquier término, a_r , del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el término independiente del binomio $z - a$ cambiado de signo, y sumando este resultado al coeficiente del término de grado $r - 1$ del dividendo.
5. El último término obtenido mediante el proceso anterior corresponde al residuo.

✱ EJEMPLO 7.6

Determina el valor del residuo mediante el teorema del residuo y usando la regla de Ruffini:

$$\text{a) } f(x) = 2x^5 - 4x^3 + x - 8 \quad \text{para } x = -5$$

$$\text{b) } f(x) = x^6 - 5x^5 + 3x^3 - x^2 + 7 \quad \text{para } x = 2$$

☆ Solución

a) De acuerdo al teorema del residuo, sustituimos x por -5 en $f(x)$:

$$f(-5) = 2 \cdot (-5)^5 - 4 \cdot (-5)^3 + (-5) - 8 = -6.250 + 500 - 5 - 8 = -5.763$$

$$R = -5.763$$

Efectuando la división sintética:

	2	0	-4	0	1	-8	
-5		-10	50	-230	1.150	-5.755	
	2	-10	46	-230	1.151	-5.763	← Residuo

Como puedes ver, se obtuvo el mismo valor para el residuo. El cociente es:

$$C(x) = 2x^4 - 10x^3 + 46x^2 - 230x + 1.151$$

$$R = -5.763$$

b) Usando el teorema del residuo:

$$f(2) = 2^6 - 5 \cdot 2^5 + 3 \cdot 2^3 - 2^2 + 7 = 64 - 160 + 24 - 4 + 7 = -69$$

$$R = -69$$

Usando la regla de Ruffini:

	1	-5	0	3	-1	0	7
2		2	-6	-12	-18	-38	-76
	1	-3	-6	-9	-19	-38	-69

En ambos casos, el resultado es el mismo. El cociente y el residuo son:

$$C(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 - 9x^2 - 19x - 38$$

$$R = -69$$

✱ EJEMPLO 7.7

Determina el cociente y el residuo de la división del polinomio $P(x) = 5x^4 - 6x^2 + 2x - 40$ por $x + 2$.

★ Solución

El binomio $x - 2$ puede ser escrito como $x - (-2)$ y, por tanto, en el extremo izquierdo de la segunda fila de la división sintética debemos colocar -2 :

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 5 & 0 & -6 & 2 & -40 \\
 -2 & & -10 & 20 & -28 & 52 \\
 \hline
 & 5 & -10 & 14 & -26 & 12
 \end{array}$$

Luego el cociente es $5x^3 - 10x^2 + 14x - 26$ y el residuo es 12:

$$5x^4 - 6x^2 + 2x - 40 = (x + 2)(5x^3 - 10x^2 + 14x - 26) + 12$$

7.8 DIVISIBILIDAD DE UN POLINOMIO POR UN BINOMIO DE LA FORMA $az + b$

Cuando se trata de dividir un polinomio $D(z)$ por un binomio $az + b$, que no tiene la forma $z - a$, debemos recurrir al procedimiento que a continuación explicamos.

Considera la división del polinomio $D(z) = 3z^2 + 8z - 12$ por el binomio $3z + 2$:

$$\begin{array}{r|l}
 3z^2 + 8z - 12 & 3z + 2 \\
 -3z^2 - 2z & z + 2 \\
 \hline
 6z - 12 & \\
 -6z - 4 & \\
 \hline
 -16 &
 \end{array}$$

Observa que el residuo es -16 . Es decir, podemos escribir:

$$3z^2 + 8z - 12 = (3z + 2)(z + 2) - 16$$

Si dividimos la expresión anterior por 3, que corresponde al coeficiente de z en el divisor, tenemos:

$$z^2 + \frac{8}{3}z - 4 = \left(z + \frac{2}{3}\right)(z + 2) - \frac{16}{3}$$

Del resultado obtenido vemos que el dividendo y el divisor cambiaron a $z^2 + \frac{8}{3}z - 4$ y $z + \frac{2}{3}$, respectivamente. El cociente permanece igual al caso

de la división sintética efectuada $(z + 2)$ y el residuo aparece dividido por 3 $\left(\frac{16}{3}\right)$. Para comprobar lo dicho, efectemos la división:

$$\begin{array}{r|l}
 z^2 + \frac{8}{3}z - 4 & z + \frac{2}{3} \\
 -z^2 - \frac{2}{3}z & z + 2 \\
 \hline
 2z - 4 & \\
 -2z - \frac{4}{3} & \\
 \hline
 -\frac{16}{3} &
 \end{array}$$

Efectivamente, el residuo aparece dividido por 3, por lo que para obtener el residuo original (-16) es necesario multiplicar el resultado anterior por 3.

En general, dado un polinomio de la forma $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, al dividido por $az + b$ obtenemos:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = (az + b) \cdot d(z) + R \quad (7.9)$$

Dividiendo por a :

$$\frac{a_n}{a} z^n + \frac{a_{n-1}}{a} z^{n-1} + \dots + \frac{a_2}{a} z^2 + \frac{a_1}{a} z + \frac{a_0}{a} = \left(z + \frac{b}{a}\right) d(z) + \frac{R}{a} \quad (7.10)$$

expresión que nos permite establecer un algoritmo para utilizar la regla de Ruffini en el caso de binomios de la forma $az + b$:

1. Divide el dividendo y el divisor por a .
2. Efectúa la división sintética con $z = -\frac{b}{a}$ en el extremo izquierdo de la segunda fila.
3. El residuo obtenido debemos multiplicarlo por a para hallar el valor verdadero del residuo.

✿ EJEMPLO 7.8

Determina el residuo de dividir:

a) $D(x) = 16x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ entre $2x + 1$.

b) $D(x) = 18x^3 - 2x^2 + 3x$ entre $3x - 2$.

☆ Solución

a) Haciendo $x = -\frac{1}{2}$:

$$D\left(-\frac{1}{2}\right) = 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1$$

$$D\left(-\frac{1}{2}\right) = 16 \cdot \frac{1}{16} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

Luego: $R = D\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

b) Haciendo $x = \frac{2}{3}$:

$$D\left(\frac{2}{3}\right) = 18 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 18 \cdot \frac{8}{27} - 2 \cdot \frac{4}{9} + 2 = \frac{16}{3} - \frac{8}{9} + 2$$

$$D\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{48 - 8 + 18}{9} = \frac{58}{9}$$

✿ EJEMPLO 7.9

Efectúa la división del polinomio $8x^4 - 16x^2 + 10$ por $2x + 1$ usando la regla de Ruffini.

☆ Solución

Primero dividimos el dividendo y el divisor por 2 y luego los ordenamos para efectuar la división sintética:

$$8x^4 - 16x^2 + 10 \div 2 = 4x^4 - 8x^2 + 5$$

$$(2x + 1) \div 2 = x + \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -\frac{1}{2} & 4 & 0 & -8 & 0 & 5 \\
 & & -2 & 1 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{4} \\
 \hline
 & 4 & -2 & -7 & \frac{7}{2} & \frac{13}{4}
 \end{array}$$

El residuo, $\frac{13}{4}$, debe ser multiplicado por 2 para obtener el residuo de la división de $8x^4 - 16x^2 + 10$ por $2x + 1$. Luego:

$$8x^4 - 16x^2 + 10 = (2x + 1) \cdot \left(4x^3 - 2x^2 - 7x + \frac{4}{9}\right) + \frac{13}{2}$$

* Ejercicios

7.5 Determina el residuo de las divisiones indicadas usando el teorema del residuo y comprueba el resultado efectuando las divisiones correspondientes:

a) $(2x^3 - 3x^2 - x + 5) \div (x - 2)$ **b)** $(z^5 - 10z^3 + 2z - 20) \div (z + 2)$

c) $(3z^5 - 2z^4 + z^2) \div (z + 1)$ **d)** $(-16x^3 - 12x^2 + 2x + 5) \div \left(x + \frac{1}{2}\right)$

e) $(z^5 - z^4 - z^2 - 1) \div (z - 1)$ **f)** $(ax^3 + bx^2 + c) \div (x - 1)$

7.6 Determina el cociente y el residuo usando la regla de Ruffini:

a) $(2z^3 - 6z^2 + 2z + 1) \div (z - 1)$ **b)** $(3x^4 - 5x^2 + 4x - 50) \div (x + 3)$

c) $(z^5 + 3z^4 + 5z^2 + 6) \div (z + 4)$ **d)** $(2x^3 + 6x^2 - 4x - 8) \div \left(x - \frac{1}{2}\right)$

e) $(-2z^4 + 4z^3 + 35z + 9) \div (z - 3)$ **f)** $(2x^4 + 9x^3 - 2x + 15) \div (x + 1)$

g) $(x^3 - 2x^2 + 2x - 3) \div (x - i)$ **h)** $(x^2 - 6x + 15) \div [x - (3 - 2i)]$

i) $(z^4 - 3z^3 + 2z^2 - 1) \div [z - (1 + i)]$ **j)** $(x^6 - 2x^3 + 2) \div [x - (1 - i)]$

k) $(3x^2 + 1) \div (3x + 1)$

l) $(10x^4 - 5x^2 + 3) \div (2x - 3)$

m) $(x^3 + 2x^2 - x + 1) \div (3x - 2)$

n) $(x^7 - 4) \div (2x + 3)$

7.7 Usa el teorema del residuo para demostrar que si n es un entero positivo:

a) $x^n - a^n$ es divisible por $x + a$ si n es par.

b) $x^n + a^n$ es divisible por $x + a$ si n es impar.

c) $x^n + a^n$ no es divisible por $x + a$ si n es par.

d) $x^n + a^n$ no es divisible por $x - a$ si n es par.

7.8 Determina el valor de k para que:

a) $2z^3 - 3z^2 + kz + 6$ sea divisible por $z + 3$.

b) $kx^4 - 5x^3 + 2x + k$ sea divisible por $x - 2$.

c) $kx^3 - (2k - 1)x - 10$ sea divisible por $x + 2$.

d) $z^3 + 2z^2 - 3kz - 10$ dividido por $z + 3$ tenga un residuo igual a 5.

7.9 Determina si:

a) $x - 3$ es un factor del polinomio $2x^3 - 5x^2 + 7x - 15$.

b) $x - 5$ es un factor del polinomio $x^4 - 5x^3 - x + 5$.

c) $x - i$ es un factor del polinomio $x^3 - 2x^2 + x - 2$.

7.9 NÚMERO Y NATURALEZA DE LAS RAÍCES DE UN POLINOMIO

Dado un polinomio de la forma $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$, los ceros del mismo son los valores de z que lo hacen igual a cero. Los ceros de $P(z)$ corresponden, por tanto, a las raíces de la ecuación:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (7.11)$$

Si $n = 1$, la relación (7.11) se convierte en:

$$a_1 z + a_0 = 0 \Rightarrow z = -\frac{a_0}{a_1}$$

La solución anterior corresponde a una ecuación de primer grado. Si $n = 2$, la relación (7.11) se convierte en una ecuación de segundo grado:

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

cuyas raíces están dadas por la familiar fórmula:

$$z = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}$$

Es posible resolver ecuaciones de tercer y cuarto grado mediante fórmulas algebraicas; sin embargo, los matemáticos han tratado en vano de encontrar fórmulas algebraicas para resolver ecuaciones de segundo grado superior a cuatro. De hecho, ha sido demostrado que tales fórmulas no existen.

Parece obvio que para una ecuación de la forma dada por (7.11) debe haber algún valor de z que satisfaga la igualdad. Esto lo establece el *Teorema Fundamental del Algebra*:

Teorema Fundamental del Algebra: Todo polinomio complejo de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz compleja (real o imaginaria).

La prueba del Teorema Fundamental del Algebra fue establecida por el matemático alemán Gauss (1777-1855) y nos conduce al siguiente teorema:

Teorema: Todo polinomio complejo de grado $n \geq 1$ tiene un máximo de n raíces complejas distintas. Si el polinomio tiene raíces iguales, el número de raíces iguales más el número de raíces distintas es igual a n .

Tomemos como ejemplo el polinomio:

$$f(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 + 4$$

Las raíces del polinomio $f(z)$ son $2, 2, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, (compruébalo). El grado de $f(z)$ es $n = 4$ y el máximo número de raíces distintas es 3 ($2, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$). Hay una raíz, 2 , que se repite y el número total de raíces es igual a 4 , que es el grado del polinomio.

Prueba: Consideremos el polinomio de grado n :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (a_n \neq 0) \quad (7.12)$$

Por el Teorema Fundamental del Algebra, $P(z)$ tiene al menos una raíz compleja, C_1 . Por el Teorema de Factorización podemos escribir:

$$P(z) = (z - C_1) q_1(z) \quad (7.13)$$

donde $q_1(z)$ es un polinomio en z de grado $n - 1$ cuyo coeficiente de grado $n - 1$ es a_n . Nuevamente, por el Teorema Fundamental del Algebra, $q(z)$ tiene una raíz compleja, digamos C_2 . Por el Teorema de Factorización:

$$P(z) = (z - C_1) (z - C_2) q_2(z) \quad (7.14)$$

donde $q_2(z)$ es un polinomio en z de grado $n - 2$, en el cual el coeficiente de grado $n - 2$ es a_n . Este proceso puede continuarse n veces hasta obtener la siguiente relación:

$$P(z) = (z - C_1) (z - C_2) \dots (z - C_n) \quad (7.15)$$

expresión que indica que hay n factores lineales en la descomposición de $P(z)$.

La ecuación asociada a $P(z)$ es:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad (7.16)$$

y de acuerdo a (7.15), podemos escribir:

$$a_n (z - C_1) (z - C_2) \dots (z - C_n) = 0 \quad (a_n \neq 0) \quad (7.17)$$

Como un producto de números es igual a cero si uno de los factores es igual a cero, las raíces de la ecuación anterior corresponden a:

$$\begin{array}{lll} z - C_1 = 0 & \Rightarrow & z = C_1 \\ z - C_2 = 0 & \Rightarrow & z = C_2 \\ \vdots & & \vdots \\ z - C_n = 0 & \Rightarrow & z = C_n \end{array}$$

Las raíces $C_1, C_2, \dots, C_n$ no son necesariamente distintas. Si cualquiera de estas raíces es distinta a las demás, se le denomina *raíz simple*. Si una raíz aparece k veces ($k > 1$), se le denomina *raíz múltiple de orden k* o *raíz de multiplicidad k* . Por ejemplo, a una raíz que aparezca 2 o 3 veces se les

llama raíz doble o triple. Por ejemplo, el polinomio complejo:

$$f(z) = 5(z - 2)^3 (z - i)^2 (z - 5)$$

es de orden 6 y tiene los siguientes ceros:

$$\begin{array}{ll} z = 2 & (3 \text{ veces, raíz triple}) \\ z = i & (2 \text{ veces, raíz doble}) \\ z = 5 & (1 \text{ vez, raíz simple}) \end{array}$$

✱ EJEMPLO 7.8

Establece el grado de multiplicidad de las raíces de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } 6(x - 2)^2(x - 1)^3 = 0 \qquad \text{b) } \frac{1}{3}x(x^2 - 25)(x + 2)^2 = 0$$

$$\text{c) } 5(x^2 - 16)(x^3 + 8) = 0$$

☆ Solución

a) Para que el producto $6(x - 2)^2(x - 1)^3$ sea igual a cero, se debe cumplir que:

$$(x - 2)^2 = 0 \qquad x = 2 \text{ (dos veces)}$$

$$(x - 1)^3 = 0 \qquad (x - 1)(x - 1)(x - 1) = 0 \quad x = 1 \text{ (tres veces)}$$

Hay cinco raíces: 2 (doble raíz), 1 (triple raíz).

b) El producto $x(x^2 - 25)(x + 2)^2$ es igual a cero si:

$$x = 0$$

$$x^2 - 25 = 0 \qquad x^2 = 25 \qquad x = \pm 5$$

$$(x + 2)^2 = 0 \qquad (x + 2)(x + 2) = 0 \qquad x = -2 \text{ (dos veces)}$$

Tenemos cinco raíces: 0, +5, -5, -2 (doble raíz).

c) Tenemos:

$$x^2 - 16 = 0 \qquad x^2 = 16 \qquad x = \pm 4$$

$$x^3 + 8 = 0 \qquad x^3 = -8 \qquad x = \sqrt[3]{-8}$$

Para determinar las raíces cúbicas de -8 , la expresamos en forma polar, $-8 = -8 + 0i = (8, 180^\circ)$. Luego:

$$\sqrt[3]{-8} = (\sqrt[3]{8}, \Phi) = (2, \Phi)$$

donde:

$$\Phi = \frac{\alpha + 2\pi K}{n} \quad (\alpha = 180^\circ, n = 3, K = 0, 1, 2)$$

Haciendo $K = 0, 1, 2$:

$$K = 0 \quad \Phi_0 = \frac{180}{3} = 60^\circ$$

$$K = 1 \quad \Phi_1 = \frac{180 + 360}{3} = 180^\circ$$

$$K = 2 \quad \Phi_2 = \frac{180 + 720}{3} = 300^\circ$$

Si llamamos Z_0 , Z_1 y Z_2 a las tres raíces de -8 , tendremos:

$$Z_0 = (2, 60^\circ) = 1 + \sqrt{3}i \quad Z_1 = (2, 180^\circ) = -2 \quad Z_2 = (2, 300^\circ) = 1 - \sqrt{3}i$$

Finalmente:

$$x = \sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 1 + \sqrt{3}i \\ 1 - \sqrt{3}i \\ -2 \end{cases}$$

Hay entonces cinco raíces distintas: $+4, -4, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$ y -2 .

✱ EJEMPLO 7.9

Forma un polinomio con coeficientes enteros que tenga las siguientes raíces:

a) $-1, 1, 3$

b) $-2, 1 + i, 1 - i$

c) $2, 2, 1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$

7.11 FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Consideremos un polinomio de tercer grado dado por:

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 1$$

cuyas raíces son 1, -2 y -5, y el coeficiente de la potencia mayor de x (x^3) es 1. Dicho polinomio puede escribirse como un producto de los factores $x - 1$, $x + 2$ y $x + 5$:

$$f(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 5)$$

En general, cualquier polinomio $f(x)$ de grado n en el cual el coeficiente de la potencia mayor de x es 1 y cuyas raíces son $x_1, x_2, \dots, x_n$, puede expresarse como:

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (7.24)$$

Considera el polinomio:

$$f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 10x + 3$$

cuyas raíces son $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = 3$ y $x_3 = -1$ y el coeficiente de la potencia mayor de x (x^3) es 4. Si $f(x)$ se escribiera de la forma:

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 3)(x + 1)$$

El resultado sería:

$$P(x) = \frac{4x^3 - 9x^2 - 10x + 3}{4}$$

Evidentemente, habría que multiplicar $P(x)$ por 4 (el coeficiente de x^3) para obtener el polinomio original $f(x)$:

$$f(x) = 4 \left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 3)(x + 1)$$

Generalizando podemos decir que cualquier polinomio de grado n cuyo término de mayor grado, x^n , esté multiplicado por un coeficiente $a_n \neq 1$ y cuyas raíces sean $x_1, x_2, \dots, x_n$, puede expresarse como:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (7.25)$$

Aun cuando cualquier polinomio puede expresarse mediante la relación (7.24) o (7.25), el proceso de determinar las raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$ puede

requerir, como ya mencionamos, el uso de métodos numéricos y de programas de computación especializados. Como puedes haber notado de lo estudiado en la sección 7.11, determinar las raíces enteras o fraccionarias de un polinomio de coeficientes enteros envuelve un tiempo apreciable. Por el contrario, el cálculo de las raíces de un polinomio en un computador es una operación que se realiza en segundos y con gran precisión.

✱ EJEMPLO 7.13

Factoriza los siguientes polinomios:

a) $P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 6$

b) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$

☆ **Solución**

a) Veamos si hay raíces enteras. Los divisores del término independiente y posibles raíces enteras son:

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm 6$$

De estos ocho valores sólo $x = -3$ hace igual a cero a $P(x)$:

$$P(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + 6 = -27 + 27 - 6 + 6 = 0$$

Como $x = -3$ es una raíz de $P(x)$, $(x + 3)$ es un factor en la descomposición factorial de $P(x)$. Usando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 3 & 2 & 6 \\ -3 & & -3 & 0 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \rightarrow x^2 + 2$$

Luego, podemos escribir:

$$P(x) = (x + 3)(x^2 + 2)$$

Haciendo $x^2 + 2 = 0$, obtenemos $x = \pm \sqrt{2}i$. Por tanto, $P(x)$ queda factorizado como:

$$P(x) = (x + 3)(x + \sqrt{2}i)(x - \sqrt{2}i)$$

b) Para determinar si hay raíces racionales de $f(x)$, busquemos los divisores de 3 y -2 :

$$p = \pm 1, \pm 2 \quad q = \pm 1, \pm 3$$

Las posibles raíces racionales de $f(x)$ son:

$$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3 \quad \pm \frac{1}{2} \quad \pm \frac{1}{3}$$

De los valores anteriores sólo $x = -2$ y $x = \frac{1}{3}$ son raíces de $f(x) = 0$. En efecto:

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^4 + 5 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 2 = 48 - 40 + 4 - 10 - 2 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3} - 2 = \frac{1}{27} + \frac{5}{27} + \frac{3}{27} + \frac{45}{27} - \frac{54}{27} = 0$$

Aplicando la regla de Ruffini para $x = -2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr} -2 & 3 & 5 & 1 & 5 & -2 \\ & & -6 & 2 & -6 & 2 \\ \hline & 3 & -1 & 3 & -1 & 0 \end{array}$$

De acuerdo al resultado anterior, podemos escribir:

$$f(x) = (x + 2)(3x^3 - x^2 + 3x - 1)$$

Aplicando la regla de Ruffini al polinomio $3x^3 - x^2 + 3x - 1$ con $x = \frac{1}{3}$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1/3 & 3 & -1 & 3 & -1 \\ & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 3 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

Este último resultado permite escribir:

$$f(x) = (x + 2) \left(x - \frac{1}{3}\right) (3x^2 + 3)$$

Las raíces del polinomio $3x^2 + 3$ son $\pm i$, por lo que finalmente nos queda:

$$f(x) = 3(x + 2) \left(x - \frac{1}{3}\right) (x + i)(x - i)$$

7.12 EL MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

En algunos temas de Matemática superior (ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace) se hace necesario manipular funciones racionales tales como:

$$F(s) = \frac{3s + 5}{s^2 + 3s + 2} = \frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 2)}$$

de manera que pueda expresarse en la forma:

$$F(s) = \frac{3s + 5}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2}$$

Al procedimiento que permite hacer la separación dada por la expresión anterior, se le denomina *expansión en fracciones parciales*, y su objetivo inicial es obtener los números A y B , a los cuales se les denomina *coeficientes indeterminados*. Las operaciones a realizar mediante este método conducen a polinomios con coeficientes enteros que igualados los de un mismo orden, permiten determinar A y B . A fin de aplicar el método, el numerador de la fracción debe ser de menor grado que el denominador. El ejemplo siguiente muestra el caso cuando el denominador tiene todas las raíces distintas.

✱ EJEMPLO 7.14

Determina la expansión en fracciones parciales de:

$$F(s) = \frac{6s^2 + 25s + 23}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

☆ Solución

Primero determinamos las raíces de $s^3 + 6s^2 + 11s + 6$. Mediante los métodos ya estudiados, encontramos que las raíces son $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = -3$. Escribiremos entonces:

$$F(s) = \frac{6s^2 + 25s + 23}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{6s^2 + 25s + 23}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{A}{s + 1} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + 3}$$

Efectuando operaciones en el lado derecho de la relación anterior:

$$\frac{6s^2 + 25s + 23}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{A(s + 2)(s + 3) + B(s + 1)(s + 3) + C(s + 1)(s + 2)}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} =$$

$$= \frac{(s^2 + 5s + 6)A + (s^2 + 4s + 3)B + (s^2 + 3s + 2)C}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

$$\frac{6s^2 + 25s + 23}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{(A + B + C)s^2 + (5A + 4B + 3C)s + 6A + 3B + 2C}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)}$$

En la igualdad anterior, tanto los denominadores como los numeradores deben ser iguales. Por tanto:

$$6s^2 + 25s + 23 = (A + B + C)s^2 + (5A + 4B + 3C)s + 6A + 3B + 2C$$

Para que la relación anterior se cumpla, es necesario que los coeficientes de potencias similares sean iguales:

$$A + B + C = 6$$

$$5A + 4B + 3C = 25$$

$$6A + 3B + 2C = 23$$

Resolviendo el sistema anterior encontraremos $A = 2$, $B = 3$, $C = 1$. Luego, la expresión en fracciones parciales es:

$$F(s) = \frac{6s^2 + 25s + 23}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} = \frac{2}{s+1} + \frac{3}{s+2} + \frac{1}{s+3}$$

Cuando hay ceros repetidos en el denominador de la fracción racional:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

El procedimiento difiere un poco del descrito anteriormente. Supongamos, por ejemplo, que $Q(s)$ tiene un cero simple s_1 y un cero s_2 de multiplicidad 3. La expansión en este caso adopta la forma:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-s_1)(s-s_2)^3} = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_3}{(s-s_2)^2} + \frac{K_4}{(s-s_2)^3}$$

✱ EJEMPLO 7.15

Expande en fracciones parciales las siguientes fracciones racionales:

$$\text{a) } F(x) = \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$$

$$\text{b) } F(s) = \frac{s+15}{s^2(s^2+2s+5)}$$

☆ Solución

a) El denominador de $F(x)$ puede ser escrito como:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2$$

Por tanto:

$$F(x) = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Efectuando operaciones:

$$\begin{aligned}\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} &= \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x+1)(x-1)^2} \\ &= \frac{(x^2-2x+1)A + (x^2-1)B + (x+1)C}{(x+1)(x-1)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A+C)x + A-B+C}{(x+1)(x-1)^2}$$

Igualando coeficientes en el numerador:

$$A+B=0 \quad -2A+C=3 \quad A-B+C=5$$

Resolviendo: $A = \frac{1}{2} \quad B = -\frac{1}{2} \quad C = 4$

Luego:

$$F(x) = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$$

b) Las raíces del denominador son $s=0$ (doble raíz) y $s=-1 \pm j2$. Por tanto:

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{s+15}{s^2(s^2+2s+5)} = \frac{s+15}{s^2(s+1+j2)(s+1-j2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1+j2} + \frac{D}{s+1-j2} \\ &= \frac{As(s^2+2s+5) + B(s^2+2s+5) + Cs^2(s+1-j2) + Ds^2(s+1+j2)}{s^2(s+1+j2)(s+1-j2)} \\ &= \frac{As^3 + 2As^2 + 5As + Bs^2 + 2Bs + 5B + Cs^3 + (1-j2)Cs^2 + Ds^3 + (1+j2)Ds^2}{s^2(s+1+j2)(s+1-j2)} \\ &= \frac{(A+C+D)s^3 + [2A+B+(1-j2)C+(1+j2)D]s^2 + (5A+2B)s + 5B}{s^2(s+1+j2)(s+1-j2)}\end{aligned}$$

Igualando coeficientes:

$$A+B+D=0 \quad 2A+B+(1-j2)C+(1+j2)D=0 \quad 5A+2B=1 \quad 5B=15$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos:

$$A = -1 \quad B = 3 \quad C = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad D = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Finalmente:

$$\frac{s+15}{s^2(s^2+2s+5)} = -\frac{1}{s} + \frac{3}{s^2} + \frac{1}{2} \frac{1-i}{s+1+j2} + \frac{1}{2} \frac{1+i}{s+1-j2}$$

Observa que en este último caso los coeficientes C y D son números complejos.

El método de los coeficientes indeterminados puede utilizarse también en una variedad de problemas donde están envueltas operaciones con polinomios. El ejemplo que sigue ilustra los procedimientos envueltos en cada caso.

✧ EJEMPLO 7.16

Calcular el cociente y el residuo en la división:

$$\text{a) } 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 \div (3x + 4) \qquad \text{b) } 6x^4 + 10x^2 + 7 \div (3x^2 - 1)$$

☆ **Solución**

a) Como el dividendo es de grado 3 y el divisor es de grado 1, el cociente será de grado 2. El residuo será un grado menor que el divisor y será, por tanto, una constante (grado cero). Luego:

$$\begin{aligned} 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 &= (3x + 4)(Ax^2 + Bx + C) + D \\ 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 &= 3Ax^3 + 3Bx^2 + 3Cx + 4Ax^2 + 4Bx + 4C + D \\ &= 3Ax^3 + (3B + 4A)x^2 + (3C + 4B)x + 4C + D \end{aligned}$$

Igualando coeficientes de igual grado:

$$3A = 2 \qquad 4A + 3B = -5 \qquad 4B + 3C = 3 \qquad 4C + D = 1$$

Resolviendo obtenemos:

$$A = \frac{2}{3} \qquad B = -\frac{23}{9} \qquad C = \frac{119}{27} \qquad D = -\frac{449}{27}$$

Entonces, el cociente y el residuo son:

$$\text{Cociente: } \frac{2}{3}x^2 - \frac{23}{9}x + \frac{119}{27} \quad \text{Residuo: } -\frac{449}{27}$$

Observa que el resultado de la división puede escribirse como:

$$\frac{2x^3 - 5x^2 + 3x + 1}{3x + 4} = \left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{23}{9}x + \frac{119}{27} \right) - \frac{449}{27} \frac{1}{3x + 4}$$

b) El dividendo es de grado 4 y el divisor es de grado 2. Por tanto, el cociente es de grado 2 y el residuo es de grado 1:

$$6x^4 + 10x^2 + 7 = (3x^2 - 1)(Ax^2 + Bx + C) + (Dx + E)$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} 6x^4 + 10x^2 + 7 &= 3Ax^4 + 3Bx^3 + 3Cx^2 - Ax^2 - Bx - C + Dx + E \\ &= 3Ax^4 + 3Bx^3 + (3C - A)x^2 - (B - D)x - C + E \end{aligned}$$

Igualando coeficientes de igual grado:

$$3A = 6 \quad 3B = 0 \quad 3C - A = 10 \quad D - B = 0 \quad E - C = 7$$

Resolviendo, obtenemos:

$$A = 2 \quad B = 0 \quad C = 4 \quad D = 0 \quad E = 11$$

Finalmente, podemos escribir:

$$6x^4 + 10x^2 + 7 = (3x^2 - 1)(2x^2 + 4) + 11$$

7.13 ECUACIONES QUE SE REDUCEN A ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Mencionamos anteriormente que en el caso de polinomios con grado superior a 2, la descomposición en factores envolvía un proceso más complicado. Las ecuaciones que podemos asociar a un polinomio de grado superior a 2 [$p(x) = 0$] también tienen el mismo grado de dificultad cuando se trata de hallar su solución. En este último caso es conveniente apelar a la ayuda de un computador para obtener una respuesta rápida y precisa.

En algunos casos particulares es posible reducir ecuaciones de grado superior a ecuaciones de segundo grado mediante un *cambio de variable*, método que se utiliza además frecuentemente en la solución de otros problemas en Matemática (por ejemplo, en la resolución de integrales). Cuando las ecuaciones tienen la forma $x^4 + px^2 + q = 0$, reciben el nombre de *bicuadradas*. El siguiente ejemplo muestra el método que puede usarse en ciertos casos.

✱ EJEMPLO 7.17

Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } x^4 - 7x^2 + 12 = 0 \qquad \text{b) } x^{2/3} - x^{1/3} = 12$$

☆ Solución

a) Se trata de una ecuación bicuadrada. Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$u = x^2 \Rightarrow u^2 = x^4$$

Sustituyendo en la ecuación dada nos queda: $u^2 - 7u + 12 = 0$

Resolviendo la ecuación anterior, obtenemos: $u = 4, \quad u = 3$

Tenemos entonces: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$$x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

Luego, las 4 raíces son: $+2, -2, +\sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

b) Si hacemos: $u = x^{1/3} \Rightarrow x^{2/3} = u^2$, la ecuación original se transforma en:

$$u^2 - u - 12 = 0$$

cuyas raíces son: $u_1 = 4, u_2 = -3$. Por tanto:

$$x^{1/3} = 4 \Rightarrow x = 4^3 \quad x = 64$$

$$x^{1/3} = -3 \Rightarrow x = (-3)^3 \quad x = -27$$

✱ Ejercicios

7.14 Determina los ceros del polinomio dado:

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

b) $f(x) = x^4 - 1$

c) $f(x) = x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 10x^2 + x - 6$

d) $p(x) = x^3 - x^2 - 13x + 21$

e) $q(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$

f) $q(x) = x^4 - x^3 - 15x^2 - 23x - 10$

g) $p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

h) $u(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2$

7.15 Determina los ceros racionales del polinomio dado:

a) $p(x) = 4x^3 + 13x^2 - 9$

b) $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$

c) $f(x) = 4x^3 + 11x^2 + x - 1$

d) $f(x) = 4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1$

e) $u(x) = 2x^2 + 3x + 4$

f) $u(x) = 2x^3 - 15x^2 + 27x - 10$

g) $q(x) = 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 12x - 4$

h) $q(x) = 3x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 20x - 8$

7.16 Determina la expansión en fracciones parciales de:

a) $\frac{x}{x^2 - 5x + 4}$

b) $\frac{x + 12}{x^3 - 8x^2 + 15x}$

c) $\frac{5x - 8}{x^3 - 3x^2}$

$$\mathbf{d)} \frac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$\mathbf{e)} \frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2}$$

$$\mathbf{f)} \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

$$\mathbf{g)} \frac{s + 4}{2s^2 + 5s + 3}$$

$$\mathbf{h)} \frac{10}{s^2(s^2 + 4)}$$

$$\mathbf{i)} \frac{s + 2}{s^2(s^2 + 1)}$$

7.17 Determina las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{a)} \ 6x^4 - 19x^2 + 3 = 0$$

$$\mathbf{b)} \ x^4 + 6x^2 - 10 = 0$$

$$\mathbf{c)} \ 9x^{-4} - 145x^{-2} + 16 = 0$$

$$\mathbf{d)} \ x^2 + x + \frac{12}{x^2 + x} - 8 = 0$$

$$\mathbf{e)} \ x^{1/3} - 4x^{1/6} + 3 = 0$$

$$\mathbf{f)} \ 2x^{-1/3} + x^{-2/3} - 8 = 0$$

INECUACIONES

Muchos de los conceptos y procedimientos que trataremos en este capítulo fueron estudiados con anterioridad en el curso de 9º grado. Como ya se mencionó, el tratamiento de algunos problemas matemáticos asociados con la vida real requiere el establecimiento de valores limitados para las variables que intervienen en ciertas relaciones. Estos límites se expresan mediante las palabras "mayor que", "menor que", "mayor o igual que" y "menor o igual que", cuyas representaciones simbólicas son:

$>$ (Mayor que)

$<$ (Menor que)

$\geq$ (Mayor o igual que)

$\leq$ (Menor o igual que)

Cuando cualquiera de los símbolos anteriores se escribe entre dos expresiones que contengan a una o más incógnitas, se obtiene una *inecuación*. Son ejemplos de inecuaciones donde la incógnita es x las siguientes:

$$x - 6 > 1$$

$$4x - 5 \geq 18$$

$$x + 1 \leq 3$$

Las dos expresiones en ambos lados del signo de desigualdad son los *miembros* de la misma. Agrupando dos desigualdades obtenemos desigualdades compuestas. Así, si decimos que x es mayor que 5 ($x > 5$) y menor o igual a 50 ($x \leq 50$), podemos escribir:

$$x > 5 \quad x \leq 50 \quad \Rightarrow \quad 5 < x \leq 50$$

A continuación hacemos un repaso de lo estudiado anteriormente en relación con las desigualdades.

8.1 INTERVALOS EN R

Un *intervalo cerrado* en R se define como el conjunto de números reales comprendidos entre los extremos a y b , incluyendo dichos extremos. Un intervalo cerrado entre a y b se representa como:

$$a \leq x \leq b \quad [a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$$

donde los corchetes indican que el intervalo incluye a los extremos a y b . Gráficamente un intervalo cerrado se representa como lo muestra la fig. 8.1.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

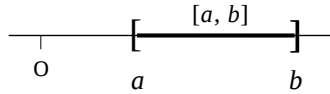


Fig. 8.1 Representación gráfica del intervalo $[a, b]$.

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

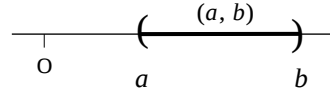


Fig. 8.2 Representación gráfica del intervalo (a, b) .

Un *intervalo abierto* en $\mathbb{R}$ entre los extremos a y b es el conjunto de números reales comprendidos entre a y b excluyendo dichos extremos. Se representa como:

$$a < x < b \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

La representación gráfica del intervalo (a, b) se muestra la fig. 8.2.

Un intervalo cerrado en el extremo a y abierto en el extremo b comprende el conjunto de números reales entre a y b , incluyendo el extremo a y excluyendo el extremo b . Este intervalo se expresa como:

$$a \leq x < b \quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

La fig. 8.3 muestra la representación gráfica de este intervalo.

Un intervalo abierto en el extremo a y cerrado en el extremo b comprende el conjunto de números reales entre a y b , excluyendo el extremo a e incluyendo el extremo b . Se expresa como:

$$a < x \leq b \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

Su representación gráfica se muestra en la fig. 8.4.

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

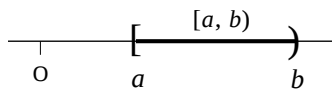


Fig. 8.3 Representación gráfica de un intervalo cerrado en a y abierto en b .

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

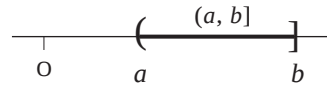
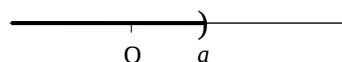


Fig. 8.4 Representación gráfica de un intervalo abierto en a y cerrado en b .

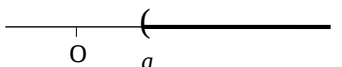
Los intervalos del tipo:

$$x \geq a \quad x > a \quad x \leq b \quad x < b$$

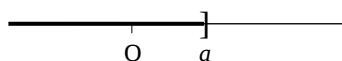
en los cuales aparece un solo límite, se conocen como *intervalos al infinito*. Si a es el límite de un intervalo al infinito, este puede adoptar las siguientes formas:



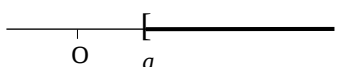
$$x < a \Rightarrow (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < a\}$$



$$x > a \Rightarrow (a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}$$



$$x \leq a \Rightarrow (-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq a\}$$



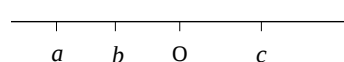
$$x \geq a \Rightarrow [a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\}$$

8.2 PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Resolver una inecuación en una variable x es determinar los valores de x que la satisfacen. Las siguientes propiedades de las desigualdades de números reales se utilizan en la resolución de inecuaciones. Es importante señalar aquí que decir $a > b$ significa también establecer la igualdad $a = b + \Delta$, donde Δ es una cantidad real positiva.

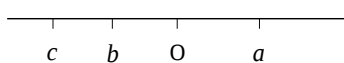
1. Propiedad transitiva: Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

Esta propiedad simplemente establece que si a se muestra a la derecha de b sobre la recta real y b se encuentra a la derecha de c , entonces a se encuentra a la derecha de c . Sobre la recta real, lo anterior será visualizado como:



$$\text{Si } a > b \text{ y } b > c \Rightarrow a > c$$

Similarmente:



$$\text{Si } a < b \text{ y } b < c \Rightarrow a < c$$

$$\text{Así: } 3 > 2 \quad 2 > 1 \Rightarrow 3 > 1$$

Demostración: Para demostrar esta propiedad notamos que si $a > b$, podemos escribir:

$$a > b \Rightarrow a = b + \Delta_1 \quad \text{donde } \Delta_1 > 0 \quad (8.1)$$

$$b > c \Rightarrow b = c + \Delta_2 \quad \text{donde } \Delta_2 > 0 \quad (8.2)$$

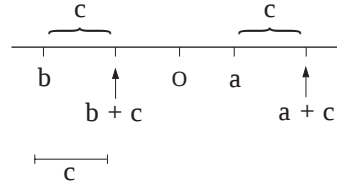
Sustituyendo el valor de b de (8.2) en la relación (8.1):

$$a = c + (\Delta_1 + \Delta_2)$$

Como $\Delta_1 > 0$ y $\Delta_2 > 0$, su suma, $\Delta_1 + \Delta_2$, es también mayor que cero y por tanto, $a > c$, ya que a es igual a c más una cantidad positiva.

2. Propiedad de adición: Si $a > b$ y c es un número real, $a + c > b + c$.

Por ejemplo, si $c > 0$, sumar c a ambos miembros de la desigualdad ($a + c, b + c$) significa gráficamente añadir, sobre la recta numérica, un segmento de longitud c a partir de a y b tal como se indica en la figura del lado



Como puedes ver, el signo de desigualdad no se altera al sumar un número real a ambos miembros de dicha desigualdad. Así, por ejemplo:

$$7 > 3 \quad 7 + 2 > 3 + 2 \Rightarrow 9 > 5$$

Demostración: Si $a > b$, se puede escribir la siguiente igualdad:

$$a = b + \Delta \quad (\Delta > 0) \quad (8.3)$$

Sumando c (un número real cualquiera) a la relación anterior:

$$a + c = b + \Delta + c \Rightarrow a + c = (b + c) + \Delta$$

Como $\Delta > 0$:

$$a + c > b + c$$

La propiedad anterior es válida también para el caso $a < b$.

3. Propiedad de multiplicación: Si $c > 0$ y $a > b$, luego $ac > bc$. Si $c < 0$ y $a > b$, luego $ac < bc$.

La propiedad enunciada establece que al multiplicar una desigualdad por un número positivo, el signo de la desigualdad se mantiene. Si la desigualdad se multiplica por un número negativo, el signo de la misma cambia. Así, por ejemplo:

$$\begin{aligned} 5 > -3 & \quad (5 \cdot 2) > (-3) \cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 10 > -6 \\ 5 > -3 & \quad 5 \cdot (-4) < (-3) \cdot (-4) \quad \Rightarrow \quad -20 < 12 \end{aligned}$$

Demostración:

a) Si $a > b$ y $c > 0$, podemos escribir:

$$a = b + \Delta \quad \text{donde} \quad \Delta > 0 \quad (8.4)$$

Multiplicando por $c > 0$ ambos miembros de (8.4):

$$ac = bc + \Delta c \quad (8.5)$$

Ahora bien, $\Delta c > 0$ porque Δ y c son ambos positivos y, por tanto:

$$ac > bc$$

b) Si $a > b$ y $c < 0$, tendremos:

$$a = b + \Delta \quad \text{donde } \Delta > 0 \quad (8.6)$$

Multiplicando ambos miembros de (8.6) por $c < 0$:

$$ac = bc + \Delta c \quad (8.7)$$

donde $\Delta c < 0$ porque $\Delta > 0$ y $c < 0$. De acuerdo a la propiedad 2, podemos escribir:

$$ac - \Delta c = bc + \Delta c - \Delta c \quad \Rightarrow \quad ac - \Delta c = bc \quad (8.8)$$

Ahora bien, $-\Delta c$ es una cantidad positiva ya que $\Delta c < 0$. Si llamamos $K = -\Delta c$ y sustituimos en (8.8):

$$ac + K = bc \quad \Rightarrow \quad ac = bc - K \quad (8.9)$$

expresión que nos dice que $ac < bc$.

Las propiedades anteriores son válidas también para $a < b$, $a \geq b$ y $a \leq b$.

8.3 SOLUCIÓN DE INECUACIONES LINEALES

Una *inecuación lineal* es una desigualdad en la cual sus dos miembros son expresiones lineales asociadas mediante los símbolos $>$, $<$, $\geq$ y $\leq$. Una *solución* de una inecuación es cualquier valor de la incógnita que la satisface. El *conjunto solución* de una inecuación es el conjunto de todas sus soluciones.

Para la desigualdad:

$$x + 2 > 3$$

El valor $x = 8$ es una solución, ya que:

$$8 + 2 > 3 \quad \Rightarrow \quad 10 > 3$$

El conjunto solución es $(1, \infty)$, ya que cualquier valor $x > 1$ satisface a la inecuación dada.

Se dicen que una inecuación es *equivalente* a otra si ambas poseen el mismo conjunto solución. Para resolver una inecuación lineal, se utilizan las propiedades de las desigualdades ya estudiadas. De esta manera se obtienen inecuaciones equivalentes con el mismo conjunto solución.

✱ EJEMPLO 8.1

Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$\text{a) } \frac{4(2x+1)}{3} > x+1 \quad \text{b) } 2-3x \leq -1 \quad \text{c) } 9-4x \geq 2x-3$$

☆ Solución

$$\text{a) } \frac{4(2x+1)}{3} > x+1$$

$$\text{Multiplicando ambos miembros por 3:} \quad 4(2x+1) > 3(x+1)$$

$$\text{Efectuando operaciones:} \quad 8x+4 > 3x+3$$

$$\text{Sumando } -4 \text{ a ambos miembros:} \quad 8x > 3x-1$$

$$\text{Sumando } -3x \text{ a ambos miembros:} \quad 5x > -1$$

$$\text{Dividiendo por 5:} \quad x > -\frac{1}{5}$$

El conjunto solución es $(-\frac{1}{5}, \infty)$ cuya representación gráfica se muestra en la fig. 8.5.

$$\text{b) } 2-3x \leq -1$$

$$\text{Sumando } -2 \text{ a ambos miembros:} \quad 3x \leq -3$$

$$\text{Multiplicando por } -1: \quad 3x \geq 3$$

$$\text{Dividiendo por 3:} \quad x \geq 1$$

El conjunto solución es $[1, \infty)$ y se muestra en la fig. 8.6.

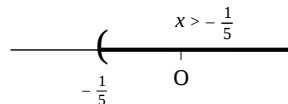


Fig. 8.5 Solución de la inecuación $\frac{4(2x+1)}{3} > x+1$.



Fig. 8.6 Solución de la inecuación $2-3x \leq -1$.

c) $9 - 4x \geq 2x - 3$

Sumando -9 : $-4x \geq 2x - 12$

Sumando $-2x$: $-6x \geq -12$

Multiplicando por -1 : $6x \leq 12$

Dividiendo por 6 : $x \leq 2$

El conjunto solución es $(-\infty, 2]$, como se muestra en la fig. 8.7.

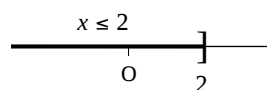


Fig. 8.7 Solución de la inecuación $9 - 4x \geq 2x - 3$.

8.4 INECUACIONES COMPUESTAS

Una inecuación compuesta es una relación en la cual tres expresiones algebraicas están unidas por símbolos de desigualdad. Son inecuaciones compuestas:

$$2 - x \leq x + 1 \leq 2 \qquad 3x - 4 < 6 + x < x + 2$$

Una inecuación compuesta puede dividirse en dos inecuaciones, técnica que facilita la solución de la misma, como se muestra en el siguiente ejemplo.

✱ EJEMPLO 8.2

Resuelve las inecuaciones:

a) $6 \leq x + 9 \leq 11$

b) $x + 3 > 3(x - 1) \geq x - 7$

☆ Solución

a) La inecuación se divide en dos inecuaciones:

$$x + 9 \geq 6$$

$$x + 9 \leq 11$$

Resolviendo:

$$x + 9 \geq 6$$

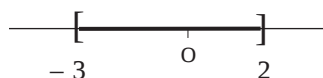
$$x \geq -3$$

$$x + 9 \leq 11$$

$$x \leq 2$$

El conjunto solución puede escribirse y graficarse como:

$$-3 \leq x \leq 2 \Rightarrow [-3, 2]$$



b) Tenemos:

$$3(x - 1) < x + 3$$

$$3(x - 1) \geq x - 7$$

Resolviendo:

$$3(x - 1) < x + 3$$

$$3x - 3 < x + 3$$

$$2x < 6$$

$$x < 3$$

$$3(x - 1) \geq x - 7$$

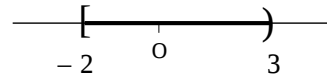
$$3x - 3 \geq x - 7$$

$$2x \geq -4$$

$$x \geq -2$$

Luego, el conjunto solución puede escribirse y graficarse como:

$$-2 \leq x < 3 \Rightarrow [-2, 3)$$



✱ EJEMPLO 8.3

En un circuito electrónico se ha determinado que si la resistencia entre los puntos A y B de la fig. 8.8 está por debajo de 550Ω o por encima de 540Ω , se produce una falla en el mismo. Para que el circuito funcione adecuadamente se le añade al resistor original $R = 600 \Omega$ otro resistor R_p en paralelo. ¿Cuáles deben ser los valores de R_p para que el circuito funcione correctamente?

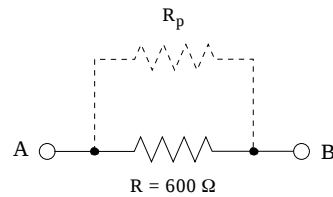


Fig. 8.8 ¿Cuál debe ser el valor de R_p para que la resistencia entre A y B sea menor que 550Ω y mayor que 540Ω .

☆ Solución

Al agregar el resistor R_p a R , ambas quedan en paralelo y su valor está dado por:

$$R_T = \frac{600 R_p}{600 + R_p}$$

De acuerdo con el enunciado del problema:

$$540 < \frac{600 R_p}{600 + R_p} < 550$$

Separando en dos inecuaciones:

$$\frac{600 R_p}{600 + R_p} > 540$$

$$\frac{600 R_p}{600 + R_p} < 550$$

Resolviendo la primera inecuación:

$$\frac{600 R_p}{600 + R_p} > 540 \quad \Rightarrow \quad 600 R_p > 540 (600 + R_p)$$

$$600 R_p > 324.000 + 540 R_p \quad 60 R_p > 324.000 \quad R_p > 5.400 \, \Omega$$

Para la segunda inecuación:

$$\frac{600 R_p}{600 + R_p} < 550 \quad 600 R_p < 550(600 + R_p)$$

$$600 R_p < 330.000 + 550 R_p \quad 50 R_p < 330.000 \quad R_p < 6.600 \, \Omega$$

Luego, el valor de R_p en ohmnios que garantiza un funcionamiento correcto del circuito es:

$$5.400 < R_p < 6.600$$

* Ejercicios

8.1 Resuelve las siguientes inecuaciones y muestra gráficamente el conjunto solución:

$$\text{a)} \, 3x - 5 < 10 \quad \text{b)} \, 11 - 4x < -5 \quad \text{c)} \, 2x - 12 \leq 13 - 3x$$

$$\text{d)} \, \frac{2x}{3} \leq \frac{23}{24} - \frac{5x}{4} \quad \text{e)} \, \frac{2x}{5} - \frac{3}{5}(10 - x) \geq 0 \quad \text{f)} \, \frac{x}{4} < 8 - \frac{x}{3}$$

$$\text{g)} \, \frac{x+5}{4} \geq 5 - x \quad \text{h)} \, -\frac{4}{7}x \geq 3 - x \quad \text{i)} \, \frac{3x}{5} \leq -8 - x$$

$$\text{j)} \, 0 < 3x - 5 \leq 16 \quad \text{k)} \, -3 < 5 - 4x \leq 17 \quad \text{l)} \, \frac{8}{x+3} \leq 2 \leq \frac{13}{x+3} \quad x > -3$$

$$\text{m)} \, 1 \leq \frac{4x}{4+x} \leq 3 \quad x > -4 \quad \text{n)} \, 1 \leq \frac{10x}{10+x} \leq 5 \quad x > 0 \quad \text{o)} \, -3 < \frac{x+7}{-3} \leq -\frac{4}{3}$$

$$\text{p)} \, 1 \geq \frac{x+4}{8} > -\frac{1}{4} \quad \text{q)} \, 4x - 1 \leq 3 \leq 7 + 2x \quad \text{r)} \, 1 - 2x < 5 - x \leq 25 - 6x$$

8.2 Las notas de un estudiante en un curso en una escala de 0 a 100 son 60, 75 y 85. ¿Qué notas en un cuarto examen dará al estudiante un promedio de notas menor que 80 y mayor que 70?

8.3 Se lanza un objeto hacia arriba con una rapidez (m/s) dada por $v = 80 - 10t$, donde t es el tiempo en segundos. ¿En qué intervalo de tiempo la velocidad estará entre 60 m/s y 70 m/s?

8.4 Un colector solar rectangular proporciona una potencia de 50 watts por m^2 . La potencia total que el colector debe suministrar está entre 2.000 y 4.000 watts. Si el ancho del colector es de 1,8 m, ¿cuál debe ser el rango de valores de su longitud para cumplir con las especificaciones?

8.5 INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número es su distancia al origen de la recta real. Si consideramos la ecuación $|x| = 5$, debemos determinar qué números están a 5 unidades del origen de la recta real. Estos corresponden a los números reales 5 y -5 que son la solución de $|x| = 5$, ya que:

$$|5| = 5 \qquad | -5 | = 5$$

Ecuaciones del tipo $|x| = -10$ no tienen solución, ya que una distancia tal como $|x|$ es siempre un número positivo.

Consideremos ahora la inecuación $|x| < 5$. Para resolverla debemos encontrar todos los números cuya distancia al origen de la recta real sea menor que 5. Tal como lo muestra la fig. 8.9 estos números están entre -5 y 5 .

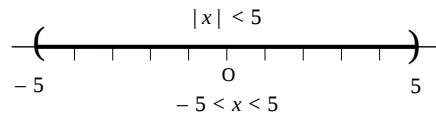


Fig. 8.9 La ecuación $|x| = 5$ tiene como solución $x > -5$, $x < 5$.

Entonces $|x| < 5$ tiene como solución al conjunto $(-5, 5)$, o también:

$$-5 < x < 5$$

En general, para una desigualdad del tipo $|x| < a$, con $a > 0$, podemos decir que la solución es:

$$x < a \quad \text{o} \quad x > -a \Rightarrow -a < x < a$$

Si $|x| \leq a$, las soluciones serán:

$$x \leq a \quad \text{o} \quad x \geq -a \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

Las gráficas correspondientes son:

$$|x| < a \quad \begin{cases} x < a \\ x > -a \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{---} (\text{---}) \text{---} \\ -a \quad 0 \quad a \end{array}$$

$$|x| \leq a \quad \begin{cases} x \leq a \\ x \geq -a \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{---} [\text{---}] \text{---} \\ -a \quad 0 \quad a \end{array}$$

Consideremos ahora la desigualdad $|x| > 4$. Esta corresponde a todos los números sobre la recta real cuya distancia al origen es mayor que 4. Sobre la recta real, dichos números son aquellos mayores que 4 o menores que -4 , tal como se muestra en la fig. 8.10.



Fig. 8.10 Solución de la ecuación $|x| > 4$.

La solución para la ecuación $|x| > 4$ puede expresarse como:

$$x > 4 \quad x < -4 \Rightarrow (-\infty, -4) \cup (4, \infty)$$

En general, si $a > 0$, la solución de la ecuación $|x| > a$ es:

$$x > a \text{ o } x < -a \Rightarrow (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$$

Si $|x| \geq a$, la solución es:

$$x \geq a \text{ o } x \leq -a \Rightarrow (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$$

Las gráficas correspondientes son:

$$|x| > a \quad \begin{cases} x > a \\ x < -a \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{---}) \text{---} (\text{---} \\ -a \quad 0 \quad a \end{array}$$

$$|x| \geq a \quad \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases} \quad \begin{array}{c} \text{---}] \text{---} [\text{---} \\ -a \quad 0 \quad a \end{array}$$

✱ EJEMPLO 8.4

Resuelve las siguientes inecuaciones y dibuja el conjunto solución:

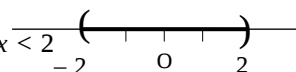
a) $|x| < 2$

b) $|x - 3| \leq 5$

c) $|4 - 2x| \geq 10$

☆ Solución

a) $|x| < 2$. El conjunto solución está dado por:

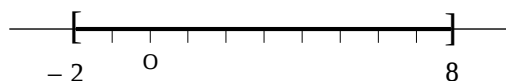
$$x < 2 \quad x > -2 \quad \Rightarrow \quad -2 < x < 2$$


b) $|x - 3| \leq 5$. La expresión $x - 3$ representa un número que está a menos de o a 5 unidades del origen de la recta real. Por tanto, $x - 3$ debe ser menor o igual que 5 y mayor o igual que -5 . Entonces, la solución es:

$$x - 3 \leq 5 \quad x - 3 \geq -5$$

Para las dos inecuaciones anteriores: $x \leq 8 \quad x \geq -2$

La solución es entonces $-2 \leq x \leq 8$, cuya representación gráfica es:



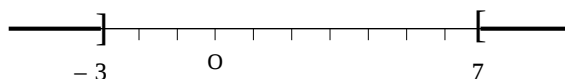
c) $|4 - 2x| \geq 10$. La expresión $4 - 2x$ representa un número que está a 10 o más de 10 unidades del origen de la recta real. Por tanto, $4 - 2x$ debe ser igual o mayor que 10 o igual o menor que -10 . Luego, la solución está dada por:

$$\begin{array}{lll} 4 - 2x \geq 10 & -2x \geq 6 & x \leq -3 \\ 4 - 2x \leq -10 & -2x \leq -14 & x \geq 7 \end{array}$$

El conjunto solución es:

$$x \leq -3 \text{ o } x \geq 7 \Rightarrow (-\infty, -3] \cup [7, \infty)$$

cuya representación es:



* Ejercicios

8.5 Resuelve las siguientes inecuaciones:

- | | | |
|--------------------------|--------------------|--------------------------------|
| a) $ x \geq 3$ | b) $ 4x \leq -4$ | c) $ -5x < 15$ |
| d) $ x - 4 \leq 3$ | e) $ 8x > -16 $ | f) $ 3x - 5 \leq -2$ |
| g) $ 4x - 6 \geq 3$ | h) $ 3 - 4x > 9$ | i) $ 6x - 3 > -3$ |
| j) $ 2x + 5 \geq x + 1$ | k) $ 5x + 10 < 0$ | l) $ 2x + 3 \geq \frac{1}{4}$ |

$$\text{m)} |5x + 2| \leq |3x - 4| \quad \text{n)} |3x + 5| > |-2x| \quad \text{o)} \left| \frac{13}{12} + \frac{2x}{3} \right| < \frac{11}{12}$$

En todos los casos anteriores, muestra gráficamente la solución.

8.6 SISTEMAS DE INECUACIONES DE UNA VARIABLE

Un sistema de inecuaciones es un conjunto de dos o más inecuaciones con una solución común. Como ejemplos de sistemas de inecuaciones de una variable, podemos citar:

$$\begin{cases} x + 2 < 4 \\ 2x + 1 \geq 6 \end{cases} \quad \begin{cases} |x| \leq 3 \\ 5x + 4 = 10 \end{cases}$$

Para resolver un sistema de inecuaciones, se procede de la siguiente manera:

1. Se resuelve cada una de las inecuaciones del sistema por separado. De esta manera se obtienen los intervalos donde son válidas las soluciones de cada inecuación.
2. Se combinan mediante signos de intersección ($\cap$) o de unión ($\cup$) los intervalos determinados para cada inecuación, de forma que obedezcan a la solución del sistema.

✱ EJEMPLO 8.5

Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y grafica la solución:

$$\text{a)} \begin{cases} x + 1 > -1 \\ 5x - 4 \leq 6 \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} |x + 1| \leq 3 \\ 2x + 5 > 4 \end{cases}$$

☆ Solución

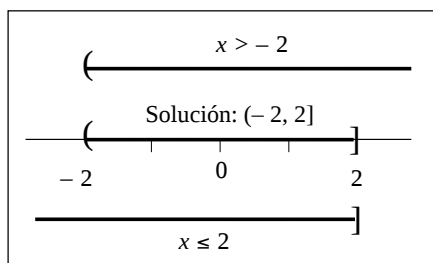
$$\text{a)} \text{ De la primera ecuación: } x + 1 > -1 \quad x > -2 \quad \Rightarrow (-2, \infty)$$

$$\text{De la segunda ecuación: } 5x - 4 \leq 6 \quad 5x \leq 10 \quad x \leq 2 \quad \Rightarrow (-\infty, 2]$$

En la fig. 8.10 se muestran los dos intervalos. El conjunto solución está dado por la intersección de los dos intervalos:

$$(-2, \infty) \cap (-\infty, 2] = (-2, 2]$$

Fig. 8.10 Solución del sistema de inecuaciones del ejemplo 8.5(a).



b) Tenemos:

$$|x + 1| \leq 3 \begin{cases} x + 1 \leq 3 \Rightarrow x \leq 2 \\ x + 1 \geq -3 \Rightarrow x \geq -4 \end{cases} \Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow [-4, 2]$$

$$2x + 5 > 4 \quad 2x > -1 \quad x > -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

En la fig. 8.11 se muestra la solución que está dada por:

$$[-4, 2] \cap \left(-\frac{1}{2}, \infty\right) = \left(-\frac{1}{2}, 2\right]$$

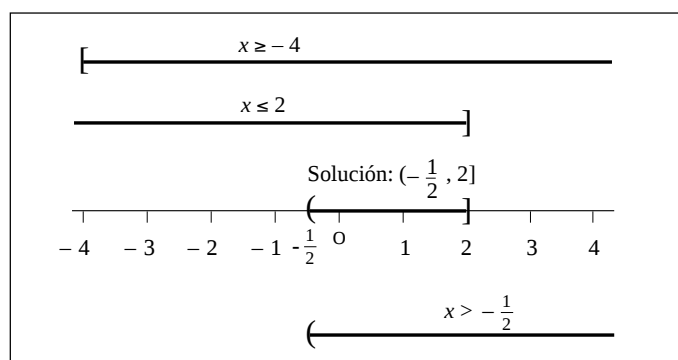


Fig. 8.11 Solución del sistema de inecuaciones del ejemplo 8.5(b).

8.7 INECUACIONES RACIONALES

Consideremos los números reales a y b con $b \neq 0$. Para el número racional a/b podemos considerar los siguientes casos:

1. $\frac{a}{b} > 0$. Esta relación se cumple si y solamente si: $a > 0$ y $b > 0$
o, también: $a < 0$ y $b < 0$

Es decir, el cociente de dos números es positivo si ambos tienen el mismo signo.

2. $\frac{a}{b} < 0$. Esta relación se cumple si y solamente si: $a > 0$ y $b < 0$
o, también: $a < 0$ y $b > 0$

Es decir, el cociente de dos números es negativo si tienen signos contrarios.

Las propiedades anteriores de los números reales nos permiten resolver inecuaciones racionales, tal como se explica en los ejemplos siguientes:

✱ EJEMPLO 8.6

Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$\text{a)} \frac{2x}{3x+9} < 0$$

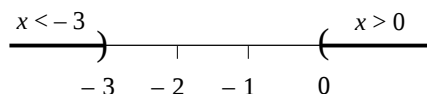
$$\text{b)} \frac{5x-10}{3-x} \geq 0$$

☆ Solución

a) $\frac{2x}{3x+9} < 0$. Para que el cociente $\frac{2x}{3x+9}$ sea negativo se debe cumplir:

$$1) \quad 2x > 0 \text{ y } 3x+9 < 0$$

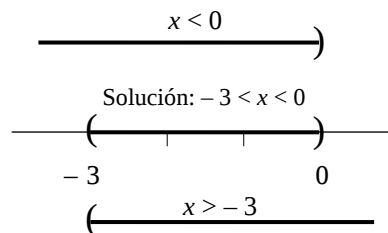
$$x > 0 \quad x < -3$$



No hay números reales que cumplan con las dos condiciones anteriores. Por tanto, para este caso la solución es el conjunto vacío $\{\emptyset\}$.

$$2) \quad 2x < 0 \text{ y } 3x+9 > 0$$

$$x < 0 \quad x > -3$$



El conjunto solución, para este caso, está dado por:

$$(-\infty, 0) \cap (-3, \infty) = (-3, 0)$$

La solución para la inecuación es la unión de los conjuntos para (1) y (2):

$$\{\emptyset\} \cup (-3, 0) = (-3, 0)$$

b) $\frac{5x-10}{3-x} \geq 0$. Para que el cociente $\frac{5x-10}{3-x}$ sea positivo o igual a cero, se pueden considerar los dos casos siguientes:

$$1) \quad 5x-10 \geq 0 \text{ y } 3-x \geq 0$$

$$x \geq 2$$

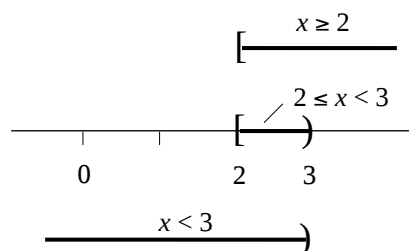
$$x \leq 3$$

$$2) \quad 5x-10 \leq 0 \text{ y } 3-x \leq 0$$

$$x \leq 2$$

$$x \geq 3$$

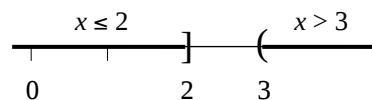
El valor $x = 3$ hay que descartarlo porque el cociente $\frac{5x-10}{3-x}$ se haría igual a $\frac{5}{0}$ que no está definido:



El conjunto solución es, en este caso:

$$[2, \infty) \cap (-\infty, 3) = [2, 3)$$

Descartamos el valor $x = 3$:



El conjunto solución es el conjunto vacío, $\{\emptyset\}$, ya que:

$$(-\infty, 2] \cap (3, \infty) = \emptyset$$

De (1) y (2), la solución de la inecuación $\frac{5x-10}{3-x} \geq 0$ es:

$$[2, 3) \cup \{\emptyset\} = [2, 3)$$

Cuando la variable de la inecuación figura en el denominador de una cantidad racional, hay que evitar multiplicar ambos lados de la inecuación por la expresión que contiene la variable a fin de eliminar el denominador, a menos que se está seguro que dicha expresión tenga signo positivo, ya que de otra forma se corre el riesgo de cambiar el signo de la desigualdad. Por ejemplo, si la inecuación es de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} < R(x)$$

En lugar de multiplicar por $Q(x)$ para eliminar el denominador, "pasamos" $R(x)$ al primer miembro de la inecuación:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - R(x) < 0$$

Luego procedemos a efectuar operaciones en el primer miembro de la inecuación para ponerle en lo que llevaremos *forma estándar*:

$$\frac{P(x) - R(x)Q(x)}{Q(x)} < 0$$

relación a la cual podemos aplicar los casos (1) y (2) ya estudiado al comienzo de esta sección.

✱ EJEMPLO 8.7

Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$\text{a)} \frac{2x-6}{x+2} - 5 < 7$$

$$\text{b)} \frac{x}{x-3} + 3 \geq \frac{7}{x-3}$$

☆ Solución

a) $\frac{2x-6}{x+2} - 5 < 7$. Pasamos 7 al primer miembro:

$$\frac{2x-6}{x+2} - 12 < 0$$

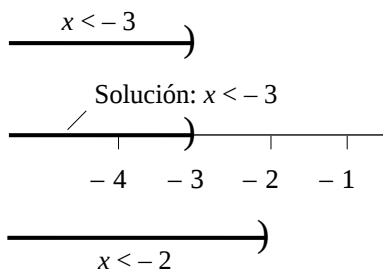
Efectuando operaciones:

$$\frac{2x-6-12x-24}{x+2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-10x-30}{x+2} < 0$$

La última desigualdad está en forma estándar y se cumple bajo las siguientes condiciones:

$$1) \quad -10x-30 > 0 \quad \text{y} \quad x+2 < 0$$

$$x < -3 \quad x < -2$$

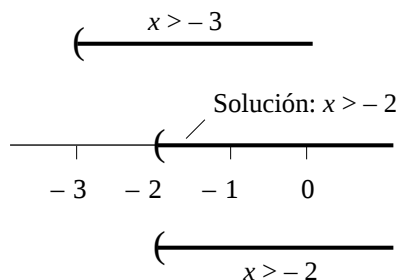


La solución es:

$$x < -3 \Rightarrow (-\infty, -3)$$

$$2) \quad -10x-30 < 0 \quad \text{y} \quad x+2 > 0$$

$$x > -3 \quad x > -2$$

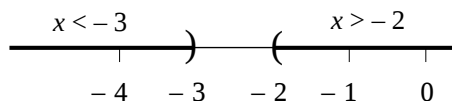


La solución es:

$$x > -2 \Rightarrow (-2, \infty)$$

El conjunto solución está dado por:

$$(-\infty, -3) \cup (-2, \infty)$$



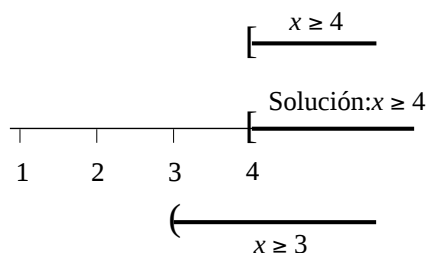
b) $\frac{x}{x-3} + 3 \geq \frac{7}{x-3}$. Pasando $\frac{7}{x-3}$ al primer miembro:

$$\frac{x}{x-3} - \frac{7}{x-3} + 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{x-7}{x-3} + 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{4x-16}{x-3} \geq 0$$

Como la desigualdad está en forma estándar, consideramos las dos alternativas siguientes:

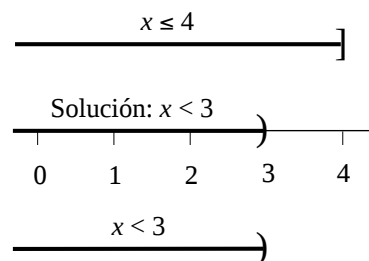
1) $4x - 16 \geq 0$ y $x - 3 \geq 0$
 $x \geq 4$ $x \geq 3$

El valor $x = 3$ lo descartamos.

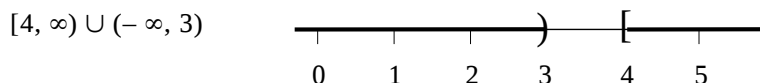


2) $4x - 16 \leq 0$ y $x - 3 \leq 0$
 $x \leq 4$ $x \leq 3$

Descartaremos el valor $x = 3$.



El conjunto solución está dado por:



8.8 INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA VARIABLE

Desigualdades tales como:

$$x^2 - 3x + 5 > 0$$

$$2x^2 - 8x + 12 < 0$$

$$x^2 + 6x - 2 \geq 0$$

$$10x^2 - 10x + 30 \leq 0$$

son inecuaciones cuadráticas. Cuando el segundo miembro es cero, como en los casos mostrados arriba, se habla de inecuaciones en *forma estándar*.

De acuerdo a lo anterior, observamos que toda inecuación de segundo grado tiene asociado un trinomio de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c$, cuyas raíces se determinan mediante la fórmula de la ecuación de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (8.10)$$

La naturaleza de las raíces dadas por (8.10) depende de la cantidad $b^2 - 4ac$:

a) Si $b^2 - 4ac = 0$, tendremos dos raíces iguales. En este caso, la representación gráfica del trinomio corresponde a una parábola que toca al eje X . Tal como se muestra en la fig. 8.12 la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo dependiendo si $a > 0$ o si $a < 0$.

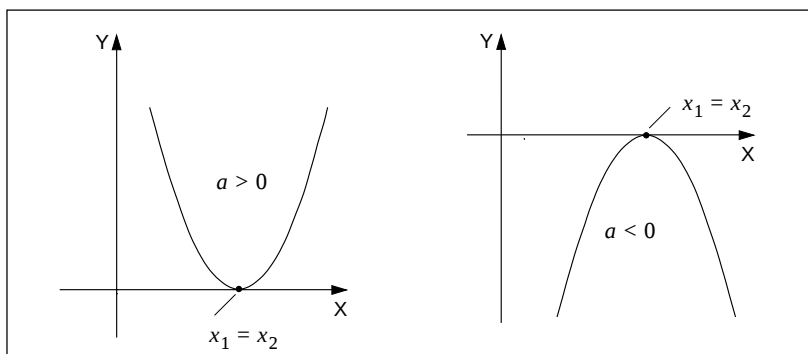


Fig. 8.12. Representación gráfica del trinomio $ax^2 + bx + c$ cuando $b^2 - 4ac = 0$.

b) Si $b^2 - 4ac > 0$, las raíces de la ecuación son reales. La representación gráfica del trinomio, fig. 8.13, muestra dos puntos de corte con el eje X . Es importante mencionar que alrededor de los puntos de corte, que correspondan a las raíces del trinomio, se producen cambios de signo en el valor numérico del mismo.

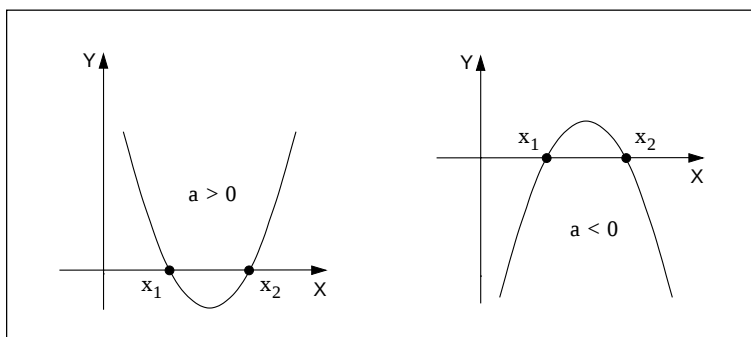


Fig. 8.13. Representación gráfica del trinomio $ax^2 + bx + c$ cuando $b^2 - 4ac > 0$.

c) Si $b^2 - 4ac < 0$, las raíces son complejas y la parábola que corresponde a la representación gráfica no corta al eje X , tal como se muestra en la fig. 8.14.

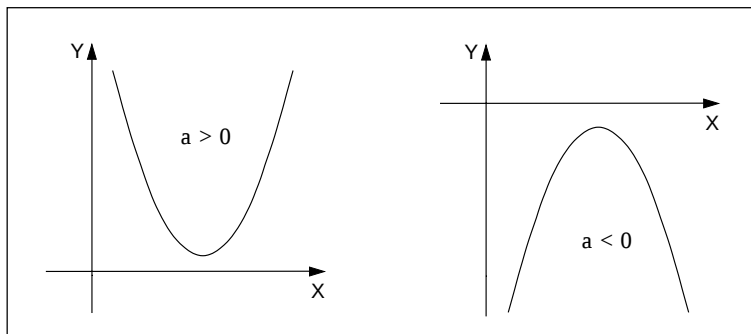


Fig. 8.14. Representación gráfica del trinomio $ax^2 + bx + c$ cuando $b^2 - 4ac < 0$.

Antes de abordar la solución de inecuaciones de segundo grado, es conveniente recordar que si a y b son números reales, se cumple:

1. $ab > 0$ si y sólo si $a > 0$ y $b > 0$ o, también, $a < 0$ y $b < 0$.
2. $ab < 0$ si y sólo si $a > 0$ y $b < 0$ o, también, $a < 0$ y $b > 0$.

Dada la inecuación $ax^2 + bx + c > 0$, si las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son x_1 y x_2 , podemos escribir:

$$a(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

Si $a > 0$, podemos dividir la relación anterior por a para obtener:

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

expresión a la cual podemos aplicar lo establecido por las condiciones (1) y (2) anteriores. Una inecuación de segundo grado se puede resolver siguiendo los siguientes pasos:

- a. Escribe la inecuación en forma estándar.
- b. Determina las raíces del trinomio de segundo grado y factorízalo.
- c. Aplica las propiedades (1) y (2) vistas anteriormente.

✱ EJEMPLO 8.8

Resuelve las inecuaciones siguientes:

a) $x^2 - 5x - 6 > 0$

b) $6x^2 + 1 \leq 5x$

c) $x^2 - 25 < 0$

Solución

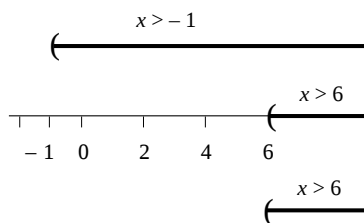
a) $x^2 - 5x - 6 > 0$. La ecuación asociada es $x^2 - 5x - 6 = 0$, cuya factorización es $(x - 6)(x + 1)$. Entonces:

$$(x - 6)(x + 1) > 0$$

La desigualdad anterior se cumple bajo las siguientes condiciones:

1) $x - 6 > 0$ y $x + 1 > 0$

$$x > 6 \quad x > -1$$

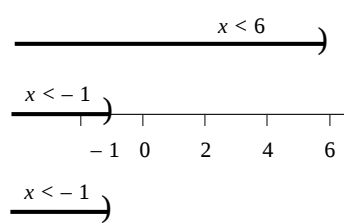


La solución es:

$$x > 6 \Rightarrow (6, \infty)$$

2) $x - 6 < 0$ y $x + 1 < 0$

$$x < 6 \quad x < -1$$



La solución es:

$$x < -1 \Rightarrow (-\infty, -1)$$

El conjunto solución es $(-\infty, -1) \cup (6, \infty)$.

La gráfica del trinomio en la fig. 8.15 muestra los valores para los cuales $x^2 - 5x - 6 > 0$. Los valores $x = -1$ y $x = 6$ no están incluidos entre esos valores.

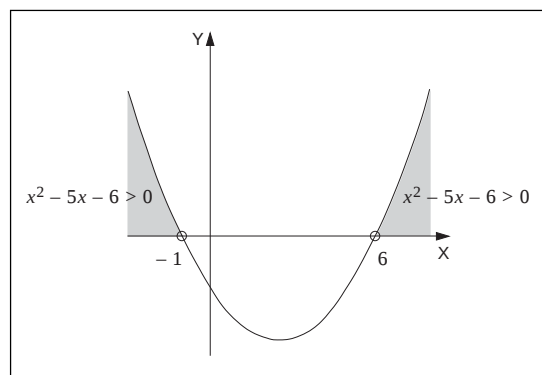


Fig. 8.15. Gráfica del trinomio $x^2 - 5x - 6$.

b) La inecuación en forma estándar es: $6x^2 - 5x + 1 \leq 0$. La ecuación asociada de segundo grado es $6x^2 - 5x + 1 = 0$, cuyas raíces son $x_1 = \frac{1}{3}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$. Por tanto, podemos escribir:

$$6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (3x - 1)(2x - 1)$$

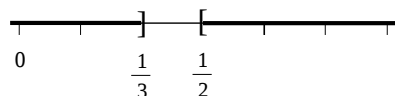
Sustituyendo en la inecuación estándar:

$$(3x - 1)(2x - 1) \leq 0$$

La desigualdad anterior se cumple en los dos casos siguientes:

1) $3x - 1 \leq 0$ y $2x - 1 \geq 0$

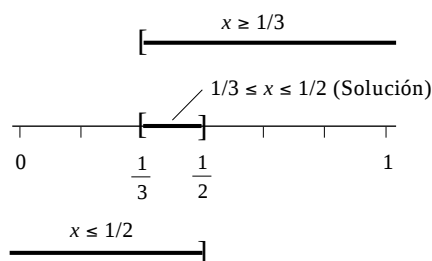
$$x \leq \frac{1}{3} \quad x \geq \frac{1}{2}$$



La solución es el conjunto vacío, ya que los dos intervalos no se interceptan.

2) $3x - 1 \geq 0$ y $2x - 1 \leq 0$

$$x \geq \frac{1}{3} \quad x \leq \frac{1}{2}$$



La solución es $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

Luego, el conjunto solución es $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \cup \{\emptyset\} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$

Si se hace una gráfica del trinomio $6x^2 - 5x + 1$, se puede visualizar cuándo su valor es negativo, tal como se muestra en la fig. 8.16.

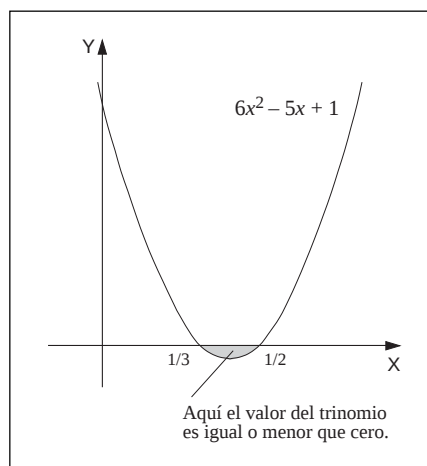


Fig. 8.16. Gráfica del trinomio $6x^2 - 5x + 1$.

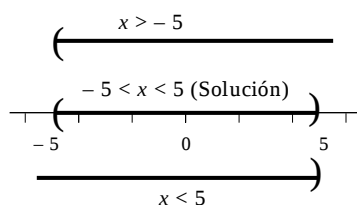
c) $x^2 - 25 < 0$. La ecuación asociada es $x^2 - 25 = 0$, de raíces $x_1 = 5$ y $x_2 = -5$. Factorizando tenemos:

$$(x + 5)(x - 5) < 0$$

Entonces:

$$1) \quad x + 5 > 0 \text{ y } x - 5 < 0$$

$$x > -5 \quad x < 5$$



La solución es:

$$-5 < x < 5 \Rightarrow (-5, 5)$$

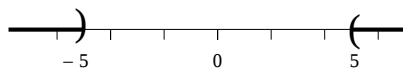
El conjunto solución es:

$$-5 < x < 5 \Rightarrow (-5, 5)$$

En la fig. 8.17 se muestra la gráfica de $x^2 - 25$, donde se indica la solución.

$$2) \quad x + 5 < 0 \text{ y } x - 5 > 0$$

$$x < -5 \quad x > 5$$



Para este caso, la solución es el conjunto vacío, $\emptyset$.

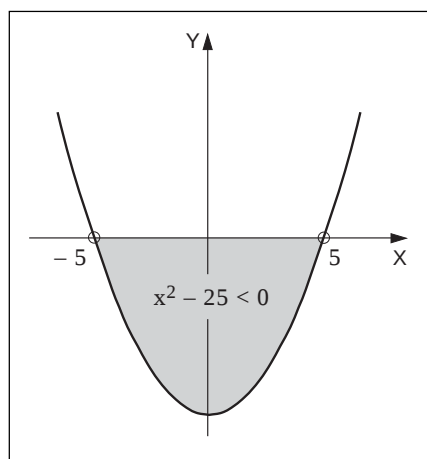


Fig. 8.17 Gráfica de $x^2 - 25$.

✱ EJEMPLO 8.9

Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$a) \quad x^2 + 8x + 25 \leq 0$$

$$b) \quad \frac{6x+8}{x+2} > \frac{3x-1}{x-1}$$

☆ Solución

a) $x^2 + 8x + 25 \leq 0$. La ecuación asociada es $x^2 + 8x + 25 = 0$, cuyas raíces son imaginarias. Por tanto, la gráfica de este trinomio no corta al eje de las X . Como $a = 1 > 0$, la concavidad es hacia arriba y la curva presenta un mínimo. El valor de este mínimo está dado por:

$$X_{\min} = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$Y_{\min} = (-4)^2 + 8 \cdot (-4) + 25 = 9$$

En la fig. 8.18 se muestra la gráfica. Como puede verse, el trinomio no adquiere valores negativos y, por tanto, la inecuación $x^2 + 8x + 25 \leq 0$ no se satisface para ningún valor de x y la solución es el conjunto vacío, $\emptyset$.

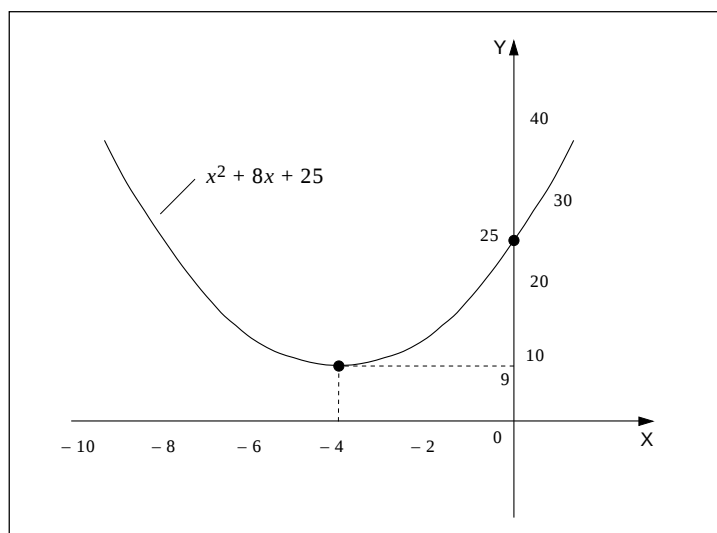


Fig. 8.18 Gráfica del trinomio $x^2 + 8x + 25$.

b) $\frac{6x+8}{x+2} > \frac{3x-1}{x-1}$. Pasando $\frac{3x-1}{x-1}$ al primer miembro:

$$\frac{6x+8}{x+2} - \frac{3x-1}{x-1} > 0$$

Efectuando operaciones en el primer miembro:

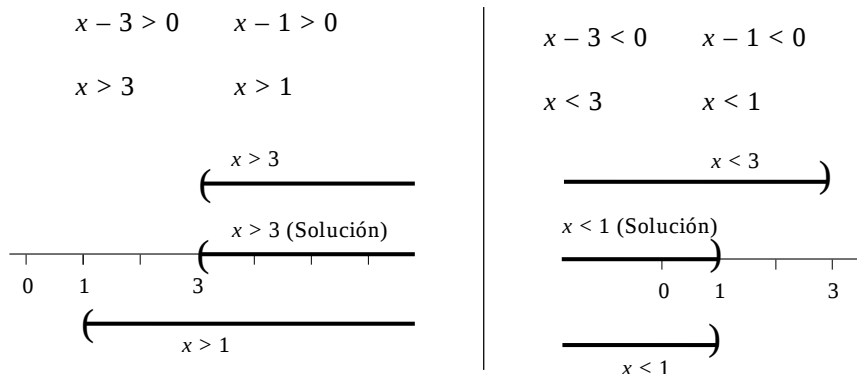
$$\frac{(6x+8)(x-1) - (3x-1)(x+2)}{(x+2)(x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{6x^2 + 2x - 8 - 3x^2 - 5x + 2}{(x+2)(x-1)} > 0$$

$$\frac{3x^2 - 3x - 6}{(x+2)(x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{3(x^2 - x - 2)}{(x+2)(x-1)} > 0 \Rightarrow \frac{(x-3)(x+2)}{(x+2)(x-1)} > 0$$

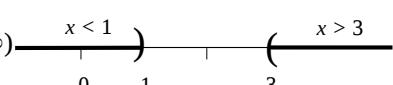
En esta última relación debemos descartar los valores $x = 2$ y $x = 1$ como soluciones, ya que hacen a la fracción indefinida. Si cancelamos $x + 2$ en el numerador y denominador, obtenemos:

$$\frac{x-3}{x-1} > 0$$

relación que se cumple si:



El conjunto solución es: $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$



Como puedes ver, los valores $x = 1$ y $x = 2$ no forman parte de la solución.

✱ EJEMPLO 8.10

Resuelve:

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 - 4x + 13 > 0 \end{cases}$$

☆ Solución

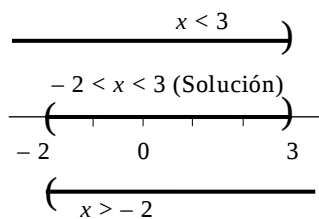
La primera ecuación del sistema puede escribirse como:

$$x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 3) < 0$$

Las dos posibilidades son:

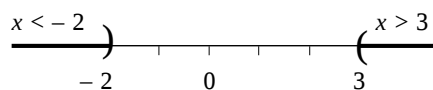
1) $x + 2 > 0$ y $x - 3 < 0$

$$x > -2 \quad x < 3$$



2) $x + 2 < 0$ y $x - 3 > 0$

$$x < -2 \quad x > 3$$



Solución: $\{0\}$

Solución: $(-2, 3)$

El conjunto solución para $x^2 - x - 6 < 0$ es $(-2, 3) \cup \{0\} = (-2, 3)$

En la fig. 8.19 se muestra la gráfica del trinomio $x^2 - x - 6$.

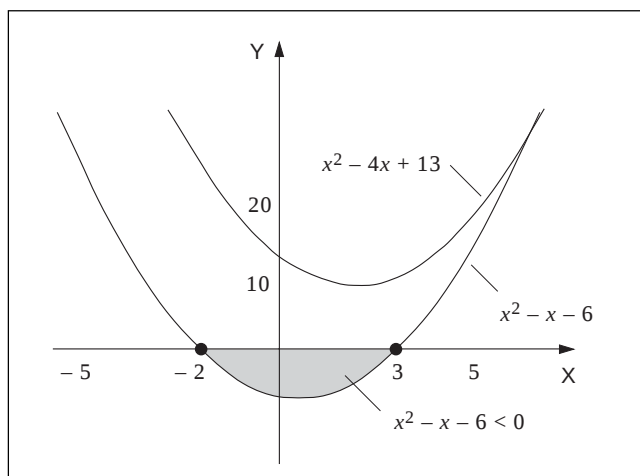


Fig. 8.19 Gráficas de los trinomios $x^2 - 4x + 13$ y $x^2 - x - 6$.

Consideremos ahora la segunda ecuación, $x^2 - 4x + 13 > 0$. La ecuación asociada es $x^2 - 4x + 13 = 0$, que no posee raíces reales (no corta al eje X) y cuya concavidad es hacia arriba ($a > 0$), tal como se muestra en la fig. 8.20. Como puede verse de la curva, la desigualdad $x^2 - 4x + 13 > 0$ se cumple para todo x y en este caso la solución es $\mathbf{R}$.

La solución del sistema es la intersección de los conjuntos solución de las dos inecuaciones:

$$(-2, 3) \cap (-\infty, \infty) = (-2, 3)$$

Solución para $x^2 - 4x + 13 > 0$: $(-\infty, \infty)$

$$\text{Solución para } x^2 - x - 6 < 0$$

$$\text{Solución del sistema}$$

✳ Ejercicios

8.6 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x - 2 < 4 \\ 2x + 13 > 15 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 2 - x \geq -1 \\ -2x + 6 \leq -3x - 3 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} |x| \geq 2 \\ 5x - 1 < 8 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \begin{cases} |x| < 4 \\ 2x - 5 \geq -3 \end{cases} & \text{e)} \begin{cases} |3x + 3| > 6 \\ 2x - 1 \leq 7 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} |x + 5| \leq 0 \\ x - 2 > 1 \end{cases} \\ \\ \text{g)} \begin{cases} x + 4 > 0 \\ x - 1 > 2 \\ x - 5 < 0 \end{cases} & \text{h)} \begin{cases} \frac{2(x-1)}{10} + \frac{x+1}{5} > x \\ 3x + 6 > 0 \end{cases} & \text{i)} \begin{cases} |x - 4| < 2 \\ |3x - 8| > 10 \end{cases} \end{array}$$

8.7 Determina el conjunto solución de las inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2x+1}{4x+1} < 1 & \text{b)} \frac{2x}{3x+1} \leq 1 & \text{c)} \frac{25-5x}{9+3x} \leq 0 \\ \\ \text{d)} \frac{5x-10}{3-x} \geq 0 & \text{e)} \frac{2x}{x+3} > \frac{1}{x+3} & \text{f)} \frac{5x-3}{7x+1} \leq 1 \end{array}$$

8.8 Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x^2 \leq 14x - 49 & \text{b)} x(6x - 13) > -6 & \text{c)} x^2 - x + 1 > 0 \\ \text{d)} 5 > x(3x + 14) & \text{e)} 6 - 5x - 6x^2 \geq 0 & \text{f)} 6x^2 \leq 15x \\ \text{g)} |x^2 + 3x| \leq x^2 + 13x & \text{h)} (2x - 1)^2 \leq 4x^2 + 2 & \text{i)} |x^2 - 1| > 3 \end{array}$$

En todos los casos anteriores dibuja la gráfica de la solución.

8.9 Determina la solución de:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{2x}{x^2+1} \leq 1 & \text{b)} \frac{x^2}{x^2+8} < 1 & \text{c)} \frac{x^2-4}{x^2+4} \geq 0 \\ \\ \text{d)} \frac{x+1}{x+2} < \frac{x+3}{x+4} & \text{e)} \begin{cases} |x| < 4 \\ x^2 - 5x > 0 \end{cases} & \text{f)} \begin{cases} x^2 + 1 < 0 \\ x^2 - 5x - 6 > 0 \end{cases} \\ \\ \text{g)} \begin{cases} x^2 + 1 > 0 \\ x^2 - 5x - 6 < 0 \end{cases} & & \end{array}$$

SECCIONES CÓNICAS

En el noveno grado establecimos que la ecuación general de la recta se puede escribir como:

$$Dx + Ey + F = 0$$

Si al primer miembro de la ecuación anterior añadimos términos cuadráticos en x y y , obtenemos la ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A, B, C \neq 0) \quad (9.1)$$

Dependiendo de la presencia o ausencia de los coeficientes A, B, C, D, E y F y de la relación entre los mismos se obtienen ecuaciones que representan a distintas curvas sobre un plano.

9.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS DE UN PLANO

Consideremos los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ situados en el plano XY , como se muestra en la fig. 9.1. La distancia AB entre dichos puntos es un número real no negativo dado por:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (9.2)$$

Así, si los puntos son:

$$A(-2, 1) \quad B(2, 4)$$

La distancia entre A y B es:

$$d_{AB} = \sqrt{[2 - (-2)]^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

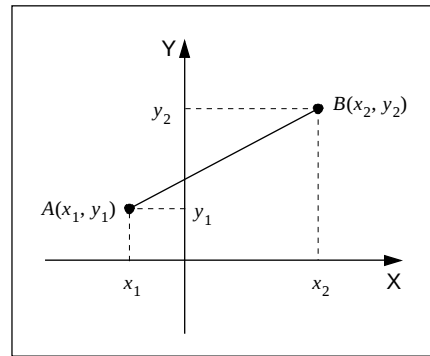


Fig. 9.1 Distancia entre dos puntos de un plano.

9.2 CURVA EN EL PLANO XY

Supongamos que x y y son dos variables reales. A las funciones tales como:

$$f(x, y) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 6 \quad g(x, y) = x + y$$

que envuelvan operaciones con esas dos variables, se les conoce con el

nombre de funciones reales de dos variables.

Dada una función $f(x, y)$ de dos variables reales, se denomina *curva en el plano XY* al conjunto de puntos $P(x, y)$ del plano que satisfacen la ecuación $f(x, y) = 0$.

Así, por ejemplo:

- a. Si $f(x, y) = x + y - 1$, entonces los puntos del plano que satisfacen la ecuación

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

definen una *recta* en el plano (fig. 9.2).

- b. Si $f(x, y) = y - x^2$, entonces los puntos en el plano que satisfacen la ecuación:

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow y - x^2 = 0 \Rightarrow y = x^2$$

Definen una *parábola* en el plano (fig. 9.3).

- c. Si $f(x, y) = x^2 + y^2 - 25$, entonces los puntos en el plano que satisfacen la ecuación:

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 25 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

Definen una *circunferencia* en el plano (fig. 9.4) con centro en $P(0, 0)$ y radio igual a $\sqrt{25} = 5$.

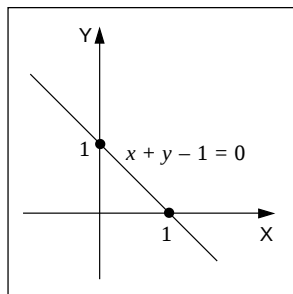


Fig. 9.2 La representación de $x + y - 1 = 0$ es una línea recta.

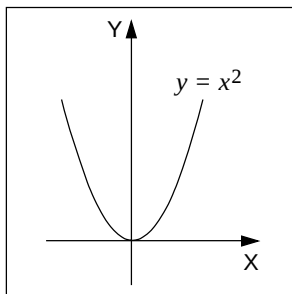


Fig. 9.3 La representación de la ecuación $y - x^2 = 0$ es una parábola.

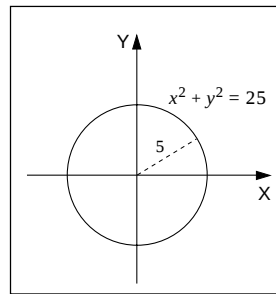


Fig. 9.4 La representación de la ecuación $x^2 + y^2 - 25 = 0$ es una circunferencia.

9.3 LUGAR GEOMÉTRICO

Sea $f(x, y)$ una función de dos variables definida en un sistema de coordenadas XY . Ya hemos visto que al resolver la ecuación $f(x, y) = 0$ se obtiene un conjunto de puntos del plano que definen una curva en el mismo.

El conjunto de los puntos del plano que satisfacen la ecuación $f(x, y) = 0$, recibe el nombre de *lugar geométrico* y a la ecuación $f(x, y) = 0$ se le denomina *ecuación del lugar geométrico*.

Por ejemplo, la circunferencia se puede definir como el conjunto de puntos de un plano que están a una distancia fija de un punto dado. De esta manera, la circunferencia queda definida como un lugar geométrico.

9.4 SECCIONES CÓNICAS

Consideremos una recta L y un punto P sobre la misma, tal como se muestra en la fig. 9.5. La superficie formada por todas las rectas que pasan por P y que forman un ángulo α con L , recibe el nombre de *cono de revolución de dos mantos*. A la recta L se le conoce como *eje del cono* y el punto P es el *vértice del cono*. Las rectas que pasan por P y que forman al cono, se les llama *generatrices del cono*.

Se llama *sección cónica* al conjunto de puntos que forman la intersección de un plano con un cono de revolución de dos mantos. Se pueden presentar los cuatro casos ilustrados en la fig. 9.5:

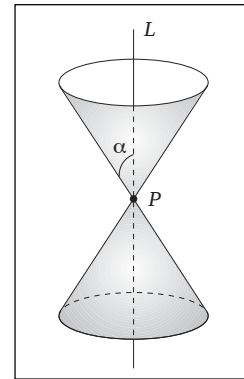


Fig. 9.5 Cono de revolución de dos mantos.

- Si el plano es perpendicular al eje del cono, la intersección es un punto o una circunferencia según el plano pase o no pase por el vértice del cono. Ver fig. 9.6(a).
- Si el plano no es perpendicular al eje, pero corta a todas las generatrices, la intersección es una elipse. Ver fig. 9.6(b).
- Si el plano es paralelo a una generatriz y corta a todas las demás generatrices, la intersección es una parábola. Ver fig. 9.6(c).
- Si el plano corta a los dos mantos del cono y no pasa por el vértice, la intersección es una hipérbola. Ver fig. 9.6(d).

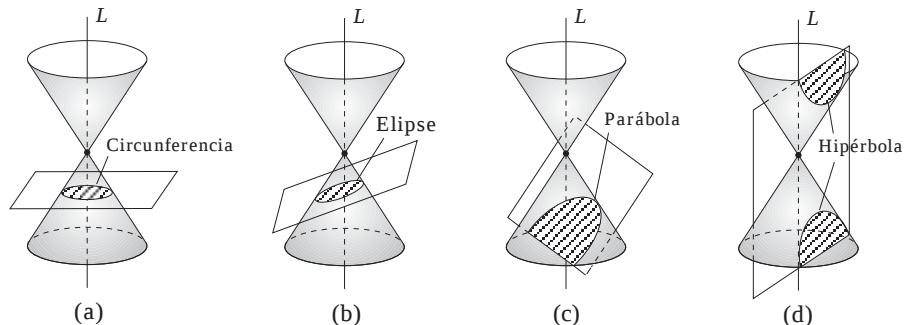


Fig. 9.6 La intersección de un plano con un cono de dos mantos puede generar: a) Una circunferencia. b) Una elipse. c) Una parábola. d) Una hipérbola.

9.5 LA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a una distancia r de otro punto dado C . r es el radio de la circunferencia y el punto C es el centro de la misma.

Sea una circunferencia de radio r cuyo centro C tiene coordenadas (h, k) , tal como se muestra en la fig. 9.7. Consideremos un punto cualquiera $P(x, y)$ situado sobre la circunferencia. Por definición de distancia entre dos puntos:

$$d_{CP} = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Esta distancia es igual a r :

$$r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

Elevando al cuadrado obtenemos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad (9.2)$$

la relación anterior representa la ecuación de una circunferencia de radio r y centro en (h, k) . Si el centro de la circunferencia es el origen, $h = k = 0$ y la ecuación (9.1) se convierte en:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (9.3)$$

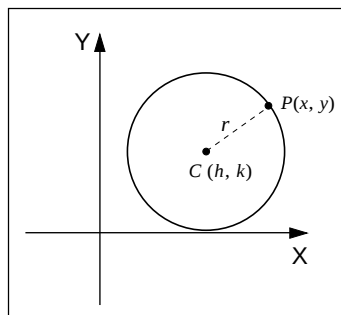


Fig. 9.7 Circunferencia de radio r y centro $C(h, k)$.

✱ EJEMPLO 9.1

Dibuja la gráfica de la ecuación:

a) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

b) $x^2 + (y + 1)^2 - 7 = 0$

☆ Solución

a) Las coordenadas del centro son $(3, 2)$ y el radio está dado por $r = \sqrt{9} = 3$. En la fig. 9.8 se representa la curva.

b) La ecuación puede escribirse como:

$$(x - 0)^2 + (y + 1)^2 = 7$$

Las coordenadas del centro son $(0, -1)$ y el radio está dado por $r = \sqrt{7} = 2,65$. En la fig. 9.8 se representa la curva.

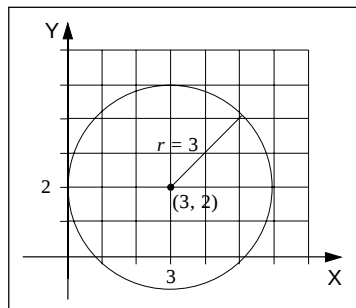


Fig. 9.8 Circunferencia de radio $r = 3$ y centro $(3, 2)$.

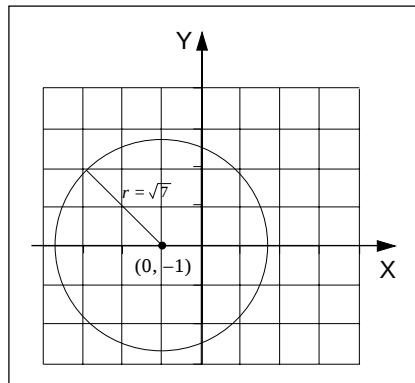


Fig. 9.9 Circunferencia de radio $\sqrt{7}$ y centro $(0, -1)$.

✧ EJEMPLO 9.2

Dibuja la gráfica de la ecuación:

a) $r = \sqrt{2}$ $C(-4, 1)$

b) $r = 2$ $C(0, -1)$

En cada caso dibuja la curva.

☆ Solución

a) El radio está dado por $r = \sqrt{2}$ y la ecuación es:

$$(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

En la fig. 9.10 se muestra la curva.

b) Con $r = 2$ y $C(0, -1)$, la ecuación de la curva es:

$$(x - 0)^2 + (y + 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + (y + 1)^2 = 4$$

En la fig. 9.11 se muestra la gráfica correspondiente.

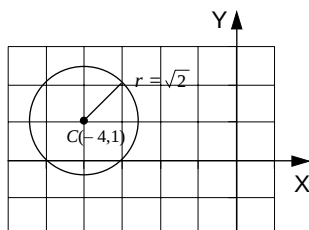


Fig. 9.10 Circunferencia de radio $r = \sqrt{2}$ y centro $(-4, 1)$.

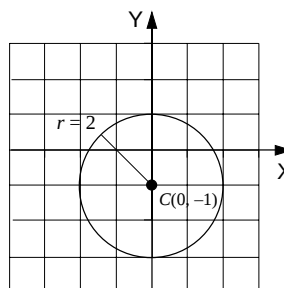


Fig. 9.11 Circunferencia de radio $r = 2$ y centro en $C(0, -1)$.

Según la relación (9.1), la ecuación general de segundo grado está dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

¿Cómo podemos saber cuándo una ecuación de segundo grado corresponde a una circunferencia? Una ecuación de segundo grado corresponde a una circunferencia si:

- a. La ecuación no tiene el término xy .
- b. Los coeficientes A y C son iguales ($A = C$).
- c. La cantidad $D^2 + E^2 - 4AF > 0$

Entonces, la ecuación $Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0$, sin término xy , representa una circunferencia si $D^2 + E^2 - 4AF > 0$. Para demostrar esto, dividamos la ecuación por A :

$$x^2 + y^2 + \frac{D}{A}x + \frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0$$

Agrupemos los términos en x y y :

$$\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + \left(y^2 + \frac{E}{A}y\right) = -\frac{F}{A}$$

Para completar trinomios cuadrados perfectos sumamos a ambos miembros $\frac{D^2}{4A^2} + \frac{E^2}{4A^2}$:

$$\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + \left(y^2 + \frac{E}{A}y + \frac{E^2}{4A^2}\right) = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

$$\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

Para que la relación anterior represente la ecuación de una circunferencia, es necesario que:

$$\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2} > 0$$

ya que $r > 0$. Como $4A^2 > 0$, entonces, $D^2 + E^2 - 4AF$ debe ser mayor que cero. El centro de la circunferencia es:

$$C\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right) \quad (9.4)$$

y su radio es:

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}} = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A} \quad (9.5)$$

✱ EJEMPLO 9.3

Prueba que la ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 30 = 0$ es la ecuación de una circunferencia y determina su centro y su radio.

☆ Solución

Agrupando términos en x y y :

$$(x^2 + 6x) + (y^2 - 10y) = -30$$

Formamos trinomios cuadrados perfectos sumando 9 y 25 a ambos miembros:

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25) = -30 + 34$$

$$(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$$

ecuación que corresponde a una circunferencia de radio 2 y centro $(-3, 5)$.

✱ EJEMPLO 9.4

Determina si la ecuación dada corresponda a una circunferencia y en caso afirmativo determina su radio y su centro.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 - 12x + 16y + 55 = 0$

☆ Solución

a) Los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales y la ecuación no tiene el término xy . Calculemos $D^2 + E^2 - 4AF$ con $A = 1$, $D = -4$, $E = 2$ y $F = -11$:

$$D^2 + E^2 - 4AF = 16 + 4 + 4 \cdot 1 \cdot 11 = 64 > 0$$

Como $D^2 + E^2 - 4AF > 0$, la ecuación dada corresponde a una circunferencia de centro dado por (9.4):

$$h = -\frac{D}{2A} = -\frac{(-4)}{2} = 2 \qquad k = -\frac{E}{2A} = -\frac{2}{2} = -1$$

El radio del círculo se puede calcular mediante (9.5):

$$r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A} = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

La solución anterior pudo también haberse determinado completando los trinomios cuadrados perfectos en x y y :

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) = 11 \Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 11 + 5$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

de donde se obtiene de nuevo: $r = 4$ y $C(2, -1)$.

b) Calculemos $D^2 + E^2 - 4AF$:

$$D^2 + E^2 - 4AF = 144 + 256 - 4 \cdot 2 \cdot 55 = 400 - 440 = -40 < 0$$

Lo que establece que la ecuación no corresponde a una circunferencia.

$$(x - 0)^2 + (y + 1)^2 = 7$$

* Ejercicios

9.1 Determina la ecuación de la circunferencia de radio r y centro C si:

- a)** $r = 3$ $C(0, 0)$ **b)** $r = \sqrt{5}$ $C(0, -3)$ **c)** $r = 1$ $C(4, 2)$
d) $r = 4$ $C(3, -2)$ **e)** $r = 2$ $C(-1, 2)$ **f)** $r = \sqrt{3}$ $C(-2, 3)$

En cada caso dibuja la circunferencia.

9.2 Determina si la ecuación dada corresponde a una circunferencia y en caso afirmativo especifica su radio y las coordenadas del centro:

- a)** $x^2 + y^2 = 7$ **b)** $(x - 2)^2 + y^2 = 9$
c) $x^2 + (y - 3)^2 - 25 = 0$ **d)** $(x + 2)^2 + (y - 3) + 1 = 0$
e) $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 - 10 = 0$ **f)** $x^2 + y^2 - 4x = 0$
g) $4x^2 + 4y^2 + 4x + 24y + 33 = 0$ **h)** $x^2 + y^2 + 5xy + 2x + 10 = 0$

9.3 Completando los trinomios cuadrados perfectos, determina el radio y centro de las circunferencias cuyas ecuaciones son:

- a)** $x^2 + y^2 + x + y = 7$ **b)** $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 56 = 0$
c) $2x^2 + 2y^2 - 5x + 3y - 1 = 0$ **d)** $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 12x - 2y + 37 = 0$ **f)** $9x^2 + 9y^2 - 6x - 12y + 2 = 0$

9.4 Determina la ecuación de la circunferencia y dibuja su curva si:

- a)** Los extremos de su diámetro son los puntos $(5, -4)$ y $(7, 3)$.
b) El centro es $C(-1, 4)$ y pasa por el punto $(4, 1)$.

9.5 Grafica las desigualdades:

$$\text{a) } x^2 + y^2 \leq 1 \quad \text{b) } x^2 + y^2 > 1 \quad \text{c) } x^2 + (y - 2)^2 \leq 9 \quad \text{d) } (x - 3)^2 + y^2 \geq 4$$

9.6 LA ELIPSE

La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano tales que la suma de las distancias a dos puntos dados de dicho plano, llamados focos, es constante.

Para ilustrar la definición anterior, consideremos la fig. 9.12. Se trata de una elipse con centro en el origen. La definición dada establece que la suma de las distancias entre el punto $P(x, y)$ y los puntos fijos $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ es un valor constante. Es decir:

$$d_{PF} + d_{PF'} = \text{constante}$$

Los puntos F y F' son los *focos* de la elipse. El eje X es el eje focal de la elipse. La distancia entre los focos es la *distancia focal* dada, según la fig. 9.12 por:

$$d_{FF'} = 2c \quad (9.6)$$

Si la suma constante de las distancias de un punto $P(x, y)$ de la elipse, a sus focos la llamamos $2a$, escribimos:

$$d_{PF} + d_{PF'} = 2a \quad (9.7)$$

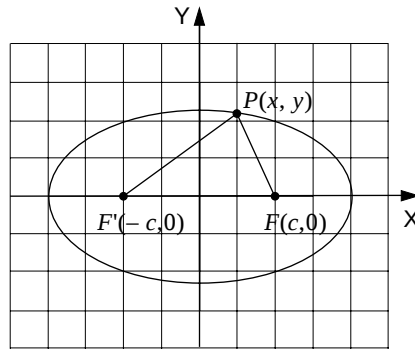


Fig. 9.12 La elipse.

Observa que en el triángulo FPF' de la fig. 9.12 se cumple:

$$d_{PF} + d_{PF'} > d_{FF'} \quad (9.8)$$

Es decir:

$$2a > 2c \Rightarrow a > c$$

Para la elipse de la fig. 9.12, los focos F y F' están situados sobre el eje de las abscisas y que el eje de las ordenadas es mediatriz del segmento FF' . De acuerdo a esto, las coordenadas de los focos son $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. Las distancias d_{FP} y $d_{F'P}$ están dadas por:

$$d_{PF} = \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}$$

$$d_{PF'} = \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2}$$

Sustituyendo en (9.7):

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \quad (9.9)$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2$$

$$2x^2 + 2c^2 + 2y^2 + 2\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2)$$

Elevando nuevamente al cuadrado:

$$[(x-c)^2 + y^2] \cdot [(x+c)^2 + y^2] = [2a^2 - (x^2 + y^2 + c^2)]^2$$

$$(x-c)^2 \cdot (x+c)^2 + y^2(x-c)^2 + y^2(x+c)^2 + y^4 = 4a^4 - 4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + (x^2 + y^2 + c^2)^2$$

$$(x^2 - c^2)^2 + y^2(x^2 - 2cx + c^2) + y^2(x^2 + 2cx + c^2) + y^4 = 4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 - 4a^2c^2$$

$$+ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2x^2c^2 + 2y^2c^2 + c^4$$

$$x^4 - 2x^2c^2 + c^4 + x^2y^2 - 2xy^2c + y^2c^2 + x^2y^2 + 2xy^2c + y^2c^2 + y^4 =$$

$$= 4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 - 4a^2c^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2x^2c^2 + 2y^2c^2 + c^4$$

$$- 2x^2c^2 = 4a^4 - 4a^2x^2 - 4a^2y^2 - 4a^2c^2 + 2x^2c^2$$

$$0 = 2a^4 - 2a^2x^2 - 2a^2y^2 - 2a^2c^2 + 2c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad (9.10)$$

Como $a > c$, $a^2 > c^2$ y, por tanto, $a^2 - c^2 > 0$. Hagamos:

$$a^2 - c^2 = b^2 > 0 \quad (9.11)$$

Sustituyendo en (9.10):

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad (9.12)$$

Dividiendo la relación anterior por a^2b^2 :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad (9.13)$$

Esta última ecuación es la ecuación de una elipse con centro en el origen y se llama ordinariamente *ecuación canónica o reducida de la elipse*.

Es interesante observar que la elipse posee importantes propiedades de reflexión. Si una fuente de luz o de sonido se coloca en uno de los focos de

la elipse, las ondas se reflejarán en el otro foco, tal como se muestra en la fig. 9.13. Si se construyese una mesa de billar en forma de elipse y se golpeará una bola colocada en un foco F , ésta pasaría por el otro foco F' .

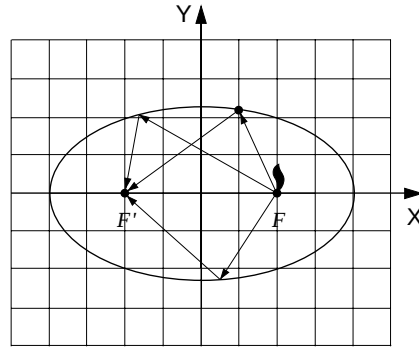


Fig. 9.13 Una fuente de luz colocada en el foco de una elipse se refleja en el otro.

9.7 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE a Y b .

Consideremos nuevamente la gráfica de una elipse con centro en el origen, como se muestra en la fig. 9.14. El centro de la elipse se encuentra en $P(0, 0)$. Los focos tienen coordenadas dadas por:

$$F(c, 0) \quad F'(-c, 0)$$

La distancia focal es $d_{FF'} = 2c$. Los puntos de corte con el eje X son A y A' . Los puntos de corte con el eje Y son B y B' . El *eje mayor* de la elipse es el segmento AA' , mientras que el *eje menor* es el segmento BB' .

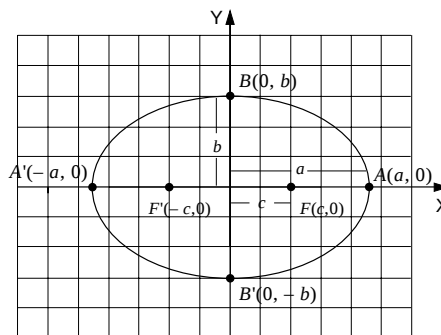


Fig. 9.14 Elipse con centro en el origen.

Si en la ecuación canónica hacemos $y = 0$, obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$$

Esto demuestra que las coordenadas de A y A' son $(a, 0)$ y $(-a, 0)$. Por tanto, las medidas de los segmentos OA y OA' es a .

Si hacemos $y = 0$ en la ecuación canónica de la elipse, tendremos:

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b$$

Lo anterior indica que b es la medida de los segmentos OB y OB' y que las coordenadas de los puntos B y B' son $(0, b)$ y $(0, -b)$.

A la relación entre c y a se le conoce como *excentricidad* de la elipse y es una medida de cuánto el gráfico de la misma se aleja del gráfico de una circunferencia:

$$\text{Excentricidad: } e = \frac{c}{a} \quad (9.14)$$

Como $c^2 = a^2 - b^2$:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1 \quad (9.15)$$

✱ EJEMPLO 9.5

Dada la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, determina sus vértices, sus focos, la longitud de sus ejes y la excentricidad. Dibuja la gráfica de la curva.

☆ Solución

La elipse tiene centro en el origen y se tiene:

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3 \quad b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

Luego, las coordenadas de los vértices son $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$, $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$.

De acuerdo con (9.11):

$$a^2 - c^2 = b^2 \quad c^2 = a^2 - b^2 \quad c^2 = 9 - 4 \Rightarrow c = \pm \sqrt{5}$$

Luego, los focos son $F(\sqrt{5}, 0)$ y $F'(-\sqrt{5}, 0)$. En la fig. 9.15 se muestra la gráfica de la elipse.

Las longitudes de sus ejes son:

$$AA' = 2a = 6 \quad BB' = 2b = 4$$

La excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

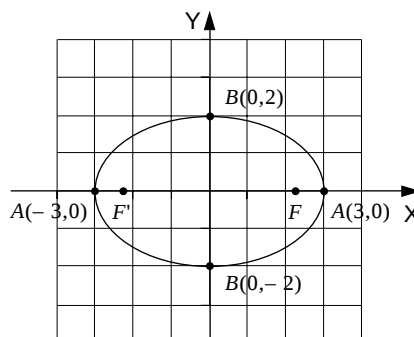


Fig. 9.15 Gráfica de la elipse para el ejemplo 9.5.

✱ EJEMPLO 9.6

Determina la ecuación de la elipse si uno de sus focos es el punto $(3, 0)$ y su vértice está en $(5, 0)$.

☆ Solución

Si las coordenadas de F son $(3, 0)$, $c = 3$. Si las coordenadas de A son $(5, 0)$, $a = 5$. Luego:

$$a^2 = 25 \quad b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

✱ EJEMPLO 9.7

Determina la ecuación de la elipse y dibuja la gráfica correspondiente si:

a) Sus focos están en $(3, 0)$ y $(-3, 0)$ y su eje mayor mide 12.

b) Pasa por los puntos $(\sqrt{6}, -1)$ y $(2, \sqrt{2})$.

☆ Solución

a) En la fig. 9.16 se indican los datos suministrados. La longitud del eje mayor es $2a$. Por tanto:

$$2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$\text{De (9.11): } b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow b = \sqrt{27} = 5,19$$

Luego, la ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. En la fig. 9.17 se muestra la gráfica.

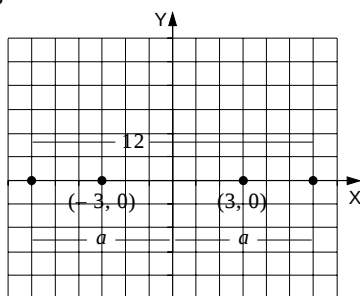


Fig. 9.16 Datos para la elipse del ejemplo 9.7.

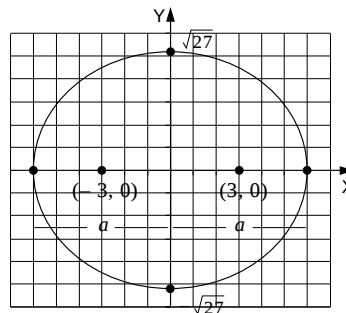


Fig. 9.17 Gráfica para la elipse del ejemplo 9.7.

b) Si la elipse pasa por los puntos $(\sqrt{6}, -1)$ y $(2, \sqrt{2})$, esos puntos satisfacen la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$:

$$(P(\sqrt{6}, -1): \quad \frac{6}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \Rightarrow 6b^2 + a^2 = a^2b^2 \quad (9.16)$$

$$P(2, \sqrt{2}): \quad \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1 \Rightarrow 4b^2 + 2a^2 = a^2b^2 \quad (9.17)$$

Restando (9.16) y (9.17):

$$2b^2 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2 = 2b^2$$

Sustituyendo el resultado anterior en (9.16):

$$6b^2 + 2b^2 = 2b^4 \Rightarrow 8b^2 = 2b^4 \Rightarrow 2b^2(b^2 - 4) = 0$$

La ecuación anterior se satisface si $b^2 = 0$ o $b^2 - 4 = 0$. El valor $b^2 = 0$ lo rechazamos (¿por qué?). Luego:

$$b^2 = 4 \quad a^2 = 2b^2 = 8$$

La ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$

Su gráfica se muestra en la fig. 9.18.

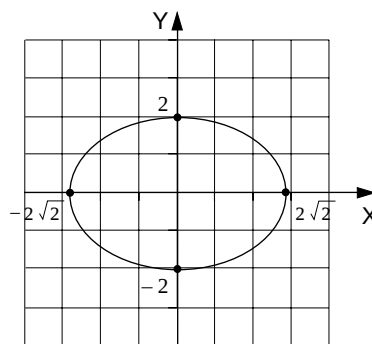


Fig. 9.18 Elipse para el ejemplo 9.7(b).

* Ejercicios

9.6 Dada la ecuación de la elipse, determina la longitud del eje mayor ($2a$), la longitud del eje menor ($2b$), las coordenadas de los focos (F y F') y de los vértices

(A y A') y la excentricidad de la elipse. Dibuja el gráfico correspondiente.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

b) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$

c) $16x^2 + 25y^2 = 400$

d) $4x^2 + 9y^2 = 36$

9.7 Escribe la ecuación de la elipse sabiendo que:

a) Los vértices están en (3, 0) y (−3, 0) y los focos están en F(2, 0) y F'(−2, 0).

b) Los focos están en (2, 0) y (−2, 0) y la excentricidad es $e = \frac{2}{5}$.

c) Los focos están en $(\pm\sqrt{7}, 0)$ y la longitud del eje menor es 3.

d) Los vértices están en $(\pm\sqrt{6}, 0)$ y pasa por el punto (0, 1).

En todos los casos anteriores dibuja la gráfica de la curva.

9.8 ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON EJE FOCAL EN EL EJE Y

Si la gráfica de la elipse muestra su eje focal sobre el eje Y (ver fig. 9.19) y las coordenadas de los focos son (0, c) y (0, −c), la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

donde a es la longitud del semieje mayor y b es la longitud del semieje menor, ligados mediante la relación:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

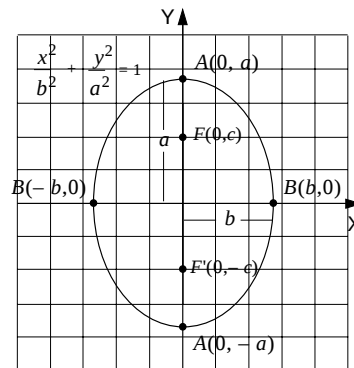


Fig. 9.19 Elipse con su eje focal sobre el eje Y.

✱ EJEMPLO 9.8

La ecuación de una elipse es:

a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

b) $9y^2 + 25x^2 = 225$

Determina las longitudes de los ejes mayor y menor, las coordenadas de los focos y de los vértices (A y A'), y la excentricidad de la elipse. En cada caso, dibuja la curva correspondiente.

☆ **Solución**

a) Se tiene:

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$$

Como el divisor de y^2 (16) es mayor que el de x^2 (4), la elipse tiene su eje focal sobre el eje Y .

Las coordenadas de A , A' , B y B' son:

$$A(0, 4) \quad A'(0, -4) \quad B(2, 0) \quad B'(-2, 0)$$

En la fig. 9.20 se muestra la elipse. Las longitudes de los ejes mayor y menor son:

$$L_{AA'} = 8 \quad L_{BB'} = 4$$

Como $c^2 = a^2 - b^2$, las coordenadas del foco son:

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = \pm 2\sqrt{3}$$

La excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86$

b) Dividiendo por 225:

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

La elipse tiene su eje focal sobre el eje Y .

Las coordenadas de A , A' , B y B' son:

$$A(0, 5) \quad A'(0, -5) \quad B(3, 0) \quad B'(-3, 0)$$

En la fig. 9.21 se muestra la elipse. Se tiene:

$$L_{AA'} = 10 \quad L_{BB'} = 9$$

$$c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c = \pm 4$$

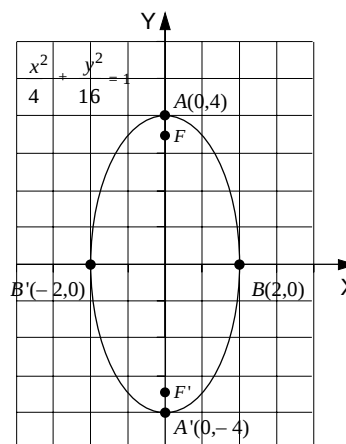


Fig. 9.20 Gráfica de la elipse del ejemplo 9.8(a).

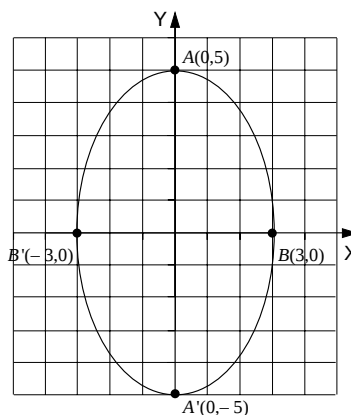


Fig. 9.21 Gráfica de la elipse del ejemplo 9.8(b).

Las coordenadas de los focos son: $F(0, 4)$ $F'(0, -4)$

La excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$

9.9 ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON CENTRO FUERA DEL ORIGEN

Si el centro de la elipse está en el punto $P(h, k)$ y su eje focal es paralelo al eje de las X (fig. 9.22), su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (9.18)$$

donde, igual a los casos anteriores:

a : longitud del semieje mayor.

b : longitud del semieje menor.

$2c$: distancia entre los focos F y F' .

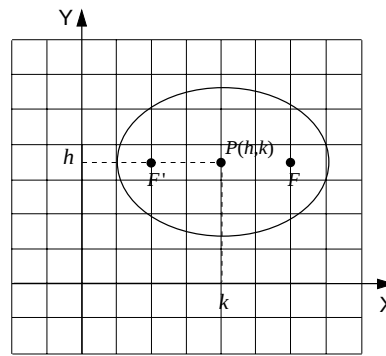


Fig. 9.22 Elipse con centro en (h, k) y eje focal paralelo a X .

La ecuación (9.18) es la ecuación canónica de la elipse con centro fuera del origen.

Si el eje focal es paralelo al eje Y , su ecuación está dada por:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (9.19)$$

En ambos casos, la relación $a^2 = b^2 + c^2$ se mantiene y la excentricidad es $e = \frac{c}{a}$.

Si desarrollamos la ecuación (9.18), obtendremos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0 \quad (9.20)$$

que puede escribirse en la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (9.21)$$

donde:

$$A = b^2 \quad C = a^2 \quad D = -2b^2h \quad E = -2a^2k \quad F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$$

Observa que la ecuación (9.21) carece de término en xy y que $AC > 0$. Si $A = C$, (9.21) podría corresponder a la ecuación de una circunferencia.

Entonces, si la ecuación de segundo grado dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

carece de términos en xy , es posible que represente a una elipse bajo ciertas condiciones. Para determinar esas condiciones, completemos los trinomios cuadrados en (9.21).

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \Rightarrow (Ax^2 + Dx) + (Cy^2 + Ey) + F = 0$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) = -F$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}\right) = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}$$

$$A\left(x^2 + \frac{D}{2A}x\right)^2 + C\left(y^2 + \frac{E}{2C}y\right)^2 = \frac{D^2C + E^2A - 4ACF}{4AC}$$

Dividiendo por AC :

$$\frac{\left(x^2 + \frac{D}{2A}x\right)^2}{C} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}y\right)^2}{A} = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2} \quad (9.22)$$

Si llamamos $M = \frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2}$ y dividimos (9.22) por M :

$$\frac{\left(x^2 + \frac{D}{2A}x\right)^2}{MC} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}y\right)^2}{MA} = 1 \quad (9.23)$$

que es la ecuación de una elipse con centro $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$.

Como $A = a^2$ y $C = b^2$, el miembro izquierdo de (9.22) es una cantidad positiva (¿por qué?) y, por tanto, M debe ser positivo si (9.23) representa una elipse. Es decir:

$$\frac{CD^2 + AE^2 - 4ACF}{4A^2C^2} > 0 \Rightarrow CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$$

De acuerdo con lo anterior, si:

- a) $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$, (9.23) corresponde a una elipse.
- b) $CD^2 + AE^2 - 4ACF = 0$, (9.23) representa a un punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$.
- c) $CD^2 + AE^2 - 4ACF < 0$, (9.23) no representa ningún lugar geométrico real.

✱ EJEMPLO 9.9

Establece si la ecuación:

a) $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y - 116 = 0$ b) $x^2 - 4y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$

corresponde a una elipse. En caso afirmativo, determina la forma canónica, las coordenadas de su centro, su excentricidad y dibuja la curva.

☆ Solución

a) Se tiene: $A = 9$ $C = 25$ $D = -18$ $E = 100$ $F = -116$

Como $AC > 0$, la ecuación representa una elipse si $CD^2 + AE^2 - 4ACF > 0$. Veamos:

$$CD^2 + AE^2 - 4ACF = 25 \cdot (-18)^2 + 9 \cdot (100)^2 - 4 \cdot (9) \cdot (25) \cdot (-116) > 0$$

Por tanto, la ecuación corresponde a una elipse. Agrupando los términos en x y y :

$$(9x^2 - 18x) + (25y^2 + 100y) = 116 \Rightarrow 9(x^2 - 2x) + 25(y^2 + 4y) = 116$$

Completando trinomios cuadrados perfectos:

$$9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 + 4y + 4) = 116 + 9 + 100$$

$$9(x - 1)^2 + 25(y + 2)^2 = 225$$

Dividiendo ambos miembros por 225:

$$\frac{9(x - 1)^2}{225} + \frac{25(y + 2)^2}{225} = 1 \Rightarrow \frac{(x - 1)^2}{25} + \frac{(y + 2)^2}{9} = 1$$

El centro de la elipse está en $(1, -2)$. Los valores de a , b y c son:

$$a = \sqrt{25} = 5 \quad b = \sqrt{9} = 3 \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

La excentricidad es:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0,8$$

En la fig. 9.23 se muestra la ecuación de la elipse. El eje mayor de la elipse es paralelo al eje X . Las coordenadas de los focos son:

$$F(h + c, k) = F(5, -2)$$

$$F'(h - c, k) = F'(-3, -2)$$

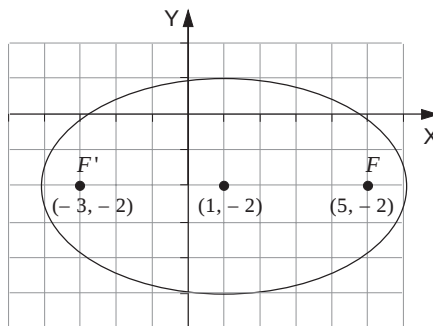


Fig. 9.23 Gráfica de la elipse del ejemplo 9.9(a).

b) Como $AC = 1 \cdot (-4) = -4 < 0$, la ecuación no representa una elipse.

✱ EJEMPLO 9.10

Los focos de una elipse son los puntos $(3, 8)$ y $(3, 2)$ y la longitud de su eje menor es 8. Determina la ecuación de la elipse, las coordenadas de sus vértices y su excentricidad. Dibuja la gráfica de la elipse.

☆ Solución

En la fig. 9.24 se muestran las coordenadas de los focos. Como puedes ver, el eje mayor de la elipse es paralelo al eje Y y su ecuación tiene la forma:

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

El centro de la elipse está situado en el punto medio entre los focos. Luego:

$$h = 3 \quad k = \frac{8 + 2}{2} = 5$$

La distancia focal es:

$$2c = 8 - 2 = 6 \Rightarrow c = 3$$

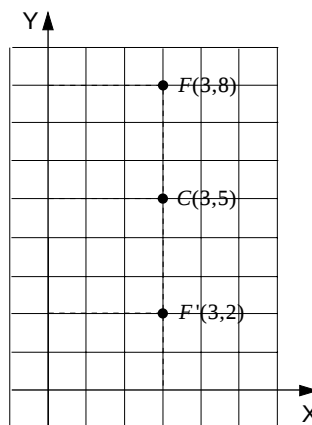


Fig. 9.24 La posición de los focos para la elipse del ejemplo 9.10, indica que su eje es paralelo al eje Y .

Como la longitud de su eje menor es 8, tenemos:

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$$

Luego:

$$a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow a = 5$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$$

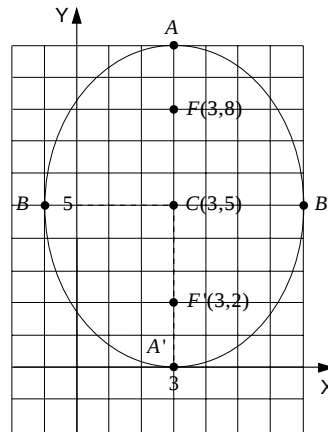
Las coordenadas de los vértices son:

$$\text{Vértice A: } (3, 5 + 5) = (3, 10)$$

$$\text{Vértice A': } (3, 5 - 5) = (3, 0)$$

$$\text{Vértice B: } (3 + 4, 5) = (7, 5)$$

$$\text{Vértice B': } (3 - 4, 5) = (-1, 5)$$



En la fig. 9.25 se muestra la gráfica de la elipse.

Fig. 9.25 Gráfica de la elipse del ejemplo 9.10.

✱ Ejercicios

En todos los ejercicios dibuja la gráfica de la elipse.

9.8 Determina la ecuación de la elipse cuyos focos están en $(0, 3)$ y $(0, -3)$ y su eje mayor mide 12.

9.9 Escribe la ecuación de la elipse sabiendo que:

a) Los vértices son $A(0, 6)$ y $A'(0, -6)$ y los focos son $F(0, 2)$ y $F'(0, -2)$.

b) Los focos tienen coordenadas $(0, \pm 2)$ y la excentricidad es $e = \frac{2}{5}$.

9.10 Determina la ecuación canónica de la elipse, si su ecuación está dada por:

a) $9x^2 + 2y^2 + 36x + 4y + 20 = 0$ b) $21x^2 + 25y^2 - 210x - 50y + 25 = 0$

c) $3x^2 + y^2 - 12x - 2y + 7 = 0$ d) $4x^2 + 3y^2 + 16x + 12y + 216 = 0$

e) $9x^2 - 72x + 16y^2 = 0$ f) $2x^2 + 2y^2 + 6x + 7 = 0$

En cada caso dibuja la gráfica de la elipse.

9.11 Determina la ecuación de la elipse que satisface las condiciones indicadas:

- Los vértices están en $(-8, 5)$, $(-2, 5)$, $(-5, 3)$ y $(-5, 7)$.
- Los vértices están en $(0, \pm 8)$ y pasa por el punto $(6, 0)$.
- El centro está en $(1, -2)$, el eje mayor es paralelo al eje Y y mide 6 unidades. El eje menor mide 4 unidades.
- El centro está en $(2, -4)$ y el vértice y el foco de un mismo lado son los puntos $(-2, -4)$ y $(-1, -4)$, respectivamente.

9.10 LA HIPÉRBOLA

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos del plano que cumplan con la condición de que el valor absoluto de la diferencia de distancias a dos puntos fijos, F y F' , llamados focos de la hipérbola, es una constante positiva.

En la fig. 9.26 se ilustra la definición. En este caso se trata de una hipérbola con sus focos sobre el eje X . La hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita. A la recta que pasa por los focos F y F' se le llama *eje focal*. Dicho eje corta a la hipérbola en los puntos V y V' que son los vértices de la curva. Al segmento VV' se le denomina *eje transverso* y su punto medio es el *centro* de la hipérbola (en este caso, el origen). El *eje normal* corresponde a la recta que pasa por el centro de la hipérbola y es perpendicular al eje focal.

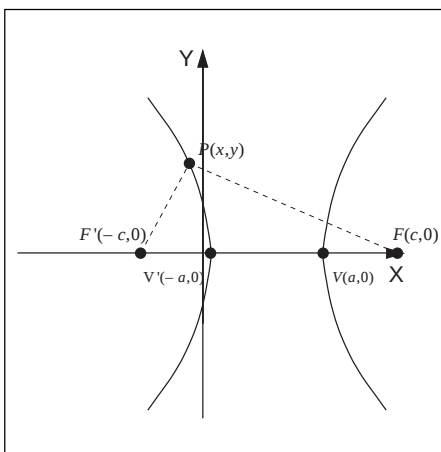


Fig. 9.26 La hipérbola.

A la distancia F y F' se le denomina distancia focal y la denotaremos por $2c$. Si tomamos un punto $P(x, y)$ sobre la hipérbola, la diferencia $|d_{PF} - d_{PF'}|$, de acuerdo con la definición, es una constante. Si llamamos a esta constante $2a$, podemos escribir:

$$|d_{PF} - d_{PF'}| = 2a \quad (9.24)$$

$$d_{PF'} = 2c \quad (9.25)$$

Antes de determinar la ecuación de la hipérbola, notemos, de la fig. 9.26, que:

$$d_{PF} < d_{FF'} + d_{PF'}$$

desigualdad que es equivalente a:

$$d_{PF} - d_{PF'} < d_{FF'} \Rightarrow 2a < 2c \Rightarrow c > a$$

De la relación (9.24) podemos escribir:

$$\left| \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$$

Desarrollando, obtenemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

Si definimos:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad (9.26)$$

Nos queda:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (9.27)$$

que es la ecuación canónica de la hipérbola.

9.11 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE a Y b . ASÍNTOTAS DE LA HIPÉRBOLA.

Las intercepciones con el eje X de la hipérbola se obtiene haciendo $y = 0$ en (9.27).

$$y = 0 \Rightarrow x = \pm a$$

La hipérbola no tiene intercepciones con el eje Y , ya que al hacer $x = 0$ obtenemos:

$$x = 0 \Rightarrow y^2 = -b^2 \Rightarrow y = \pm b\sqrt{-1} \quad (9.28)$$

resultado que no tiene soluciones reales. A pesar de que los puntos $\pm b$ no pertenecen a la hipérbola, a la distancia $2b$ entre los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$ se le conoce como *eje conjugado* o *eje no transverso*.

Si de la ecuación despejamos a y, obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (9.29)$$

Para obtener valores reales para y en la relación anterior, es necesario que:

$$x^2 - a^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq a \\ x \leq -a \end{cases}$$

Por tanto, entre $x = -a$ y $x = a$ no hay ningún punto de la gráfica de la hipérbola.

Si modificamos (9.29):

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Si en esta última el valor de x se hace mucho mayor que el de a , la fracción $\frac{x^2}{a^2}$ se hace mucho más pequeña que 1 y podemos escribir:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad (9.30)$$

A las relaciones $y = +\frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$, cuyas gráficas son líneas rectas que pasan por el origen y de pendientes $+\frac{b}{a}$ y $-\frac{b}{a}$, son las asíntotas de la hipérbola. En la fig. 9.27 se representan una hipérbola y sus asíntotas. Estas últimas son guías muy útiles para dibujar la gráfica de la hipérbola. Para ello, se comienza por colocar los vértices $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, así como los puntos $(0, b)$ y $(0, -b)$. esto determina el rectángulo auxiliar de líneas discontinuas de la fig. 9.28. Las rectas que pasan por las diagonales corresponden a las gráficas de las asíntotas dadas por (9.30). La hipérbola tiene sus vértices en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ y a medida que los valores de x se alejan de a o de $-a$, la curva se acerca a las asíntotas. A las dos partes de la curva se les conoce como *ramas de la hipérbola*.

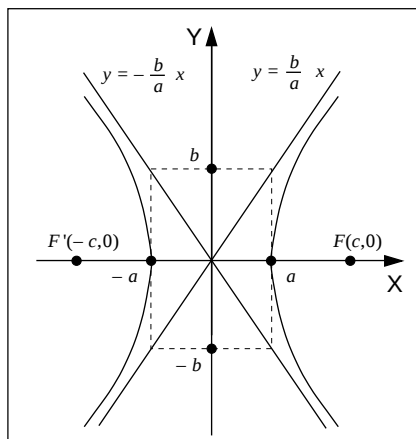


Fig. 9.27 Dibujo de una hipérbola conocidos a , b y las asíntotas.

La excentricidad de una hipérbola se define como en el caso de la elipse:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} > 1 \quad (9.31)$$

✱ EJEMPLO 9.11

Determina la ecuación de la hipérbola que cumpla con las condiciones dadas y dibuja la gráfica correspondiente: **a)** Tiene sus focos en $(2, 0)$ y $(-2, 0)$ y sus vértices en $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. **b)** Tiene sus vértices en $(\pm 4, 0)$ y pasa por $P(8, 2)$.

☆ Solución

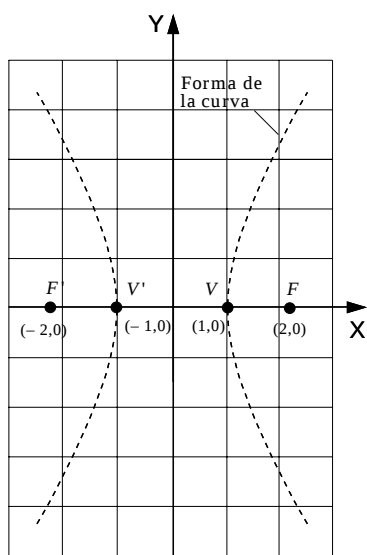
a) En la fig. 9.28(a) se muestra la ubicación de los focos y de los vértices y la forma de la curva. De acuerdo a lo estudiado:

$$a = 1 \quad c = 2 \quad b = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

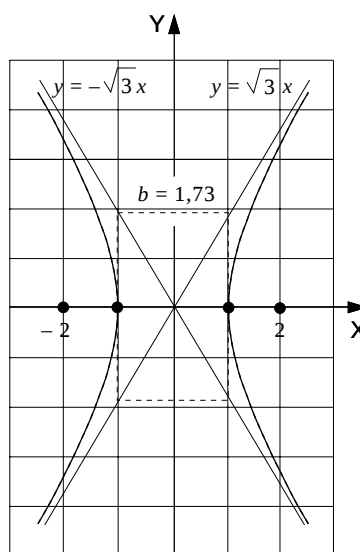
La ecuación resultante es:

$$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$$

En la fig. 9.28(b) se dibujan a , b y el rectángulo auxiliar, las asíntotas y la hipérbola resultante.



(a)



(b)

Fig. 9.28 Ejemplo 9.11. (a) Ubicación de los vértices y focos. (b) Gráfica de la curva.

b) De los datos del problema se puede deducir que $a = 4$. La ecuación de la hipérbola se puede definir como:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como la curva pasa por $P(8, 2)$, los valores $x = 8, y = 2$ satisfacen la ecuación anterior:

$$\frac{8^2}{16} - \frac{2^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} = \pm 1,15$$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{3}{4}y^2 = 1$$

Las asíntotas son:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{4}x \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}x$$

En la fig. 9.29 se muestra la hipérbola correspondiente.

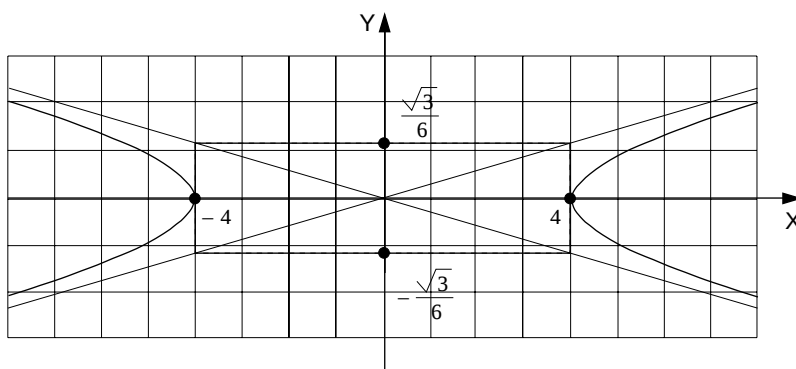


Fig. 9.29 Gráfica de la hipérbola para el ejemplo 9.11 (b).

9.12 OTRAS ECUACIONES DE LA HIPÉRBOLA

Si los focos están sobre el eje Y y el centro en el origen, la ecuación de la hipérbola adquiere la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (9.32)$$

En la fig. 9.30 se muestra la forma de la curva. Observa que en este caso el término que contiene a x está precedido por un signo negativo. Las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \pm \frac{a}{b}x$.

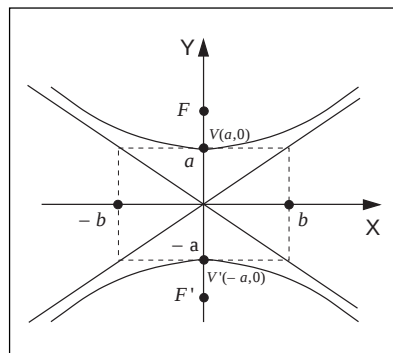


Fig. 9.30 Hipérbola con focos sobre el eje Y.

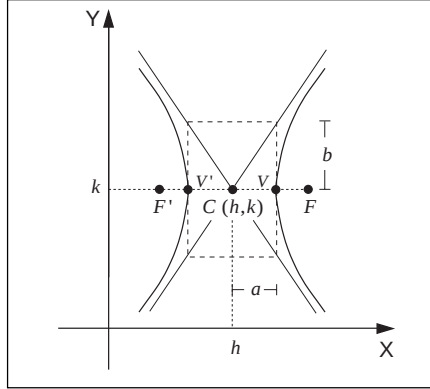


Fig. 9.31 Hipérbola con centro $c(h, k)$ y eje focal paralelo al eje X.

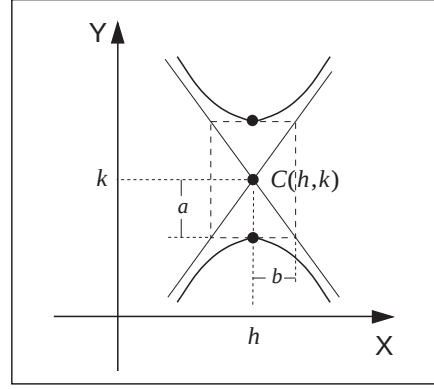


Fig. 9.32 Hipérbola con centro en (h, k) y eje focal paralelo al eje Y.

Si el centro de la hipérbola está en el punto (h, k) y su eje focal es paralelo al eje X, su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (9.33)$$

En la fig. 9.31 se muestra la forma de la curva. Las ecuaciones de las asíntotas son: $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$.

Si el centro de la hipérbola está en (h, k) y su eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (9.34)$$

En la fig. 9.32 se muestra la forma de esta hipérbola. Las ecuaciones de las asíntotas son: $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$.

Si se hace un desarrollo de la ecuación (9.33), se obtiene una ecuación equivalente de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

que representa una hipérbola siempre y cuando $AC < 0$, es decir, si los signos de A y C son diferentes.

✱ EJEMPLO 9.12

Determina la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas son $y = \pm 2$ y sus vértices son $V(0, 4)$ y $V'(0, -4)$. La ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

☆ Solución

Como las coordenadas de los vértices son $(0, 4)$ y $(0, -4)$, $a = 4$.

Como una asíntota es $y = 2x$ y su forma general es $y = \frac{a}{b}x$, se deduce que:

$$\frac{a}{b} = 2 \Rightarrow b = \frac{a}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$$

La ecuación es:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$$

Como $c^2 = a^2 + b^2$:

$$c^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow c = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$$

Luego, las coordenadas de los focos son:

$$F(0, 2\sqrt{5}) \quad F'(0, -2\sqrt{5})$$

En la fig. 9.33 se muestra la curva correspondiente.

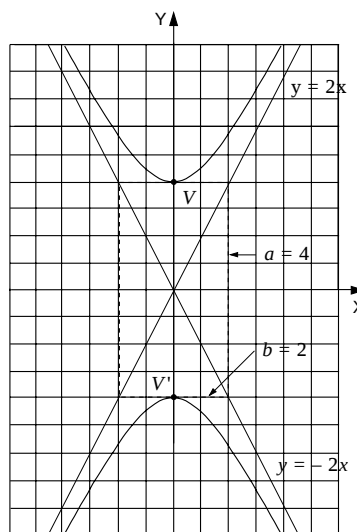


Fig. 9.33 Gráfica de la hipérbola del ejemplo 9.12.

✱ EJEMPLO 9.13

El centro de una hipérbola es el punto $(4, 5)$ y uno de sus focos está en $(8, 5)$. Si la excentricidad de la hipérbola es 2, determina su ecuación y las longitudes de sus ejes transversos y conjugados. Dibuja la curva.

☆ Solución

En la fig. 9.34 se indican los datos conocidos para la hipérbola y, de acuerdo a ellos, la forma de la curva.

De la figura podemos ver que el eje focal es paralelo al eje X y que, por tanto, la ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

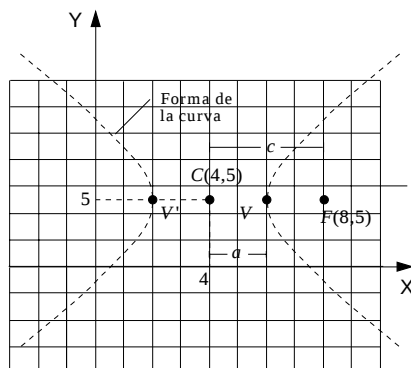


Fig. 9.34 Localización del centro y uno de los focos para la hipérbola del ejemplo 9.13.

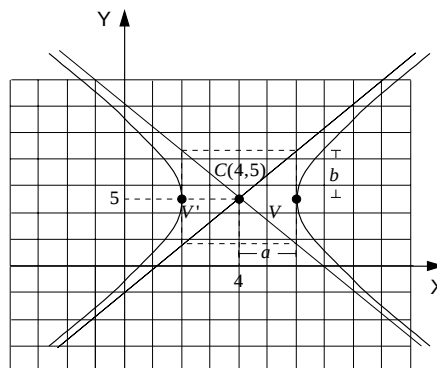


Fig. 9.35 Gráfica de la hipérbola del ejemplo 9.13.

Como $h = 4$ y $k = 5$, la ecuación se convierte en:

$$\frac{(x-4)^2}{a^2} - \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1$$

De la fig. 9.34, $c = 8 - 4 = 4$. Como $e = 2$:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{e} = \frac{4}{2} = 2$$

El valor de b^2 es:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3} = 3,46$$

Luego, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{12} = 1$$

En la fig. 9.35 se muestra la curva exacta. Las coordenadas de los vértices son:

$$V(6, 5) \quad V'(2, 5)$$

✱ EJEMPLO 9.14

Escribe la ecuación canónica de la hipérbola cuya expresión es:

$$3x^2 - 18x - 5y^2 - 40y - 68 = 0$$

Determina los vértices, las longitudes de los ejes transverso y conjugado, los focos, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas.

★ Solución

Agrupando los términos en x y y :

$$(3x^2 - 18x) - (5y^2 + 40y) = 68$$

$$3(x^2 - 6x) - 5(y^2 + 8y) = 68$$

Completando los trinomios cuadrados perfectos:

$$3(x^2 - 6x + 9) - 5(y^2 + 8y + 16) = 68 + 27 - 80$$

$$3(x - 3)^2 - 5(y + 4)^2 = 15$$

Dividiendo por 15 obtenemos la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{(x - 3)^2}{5} - \frac{(y + 4)^2}{3} = 1$$

De la ecuación anterior tenemos:

$$h = 3 \quad k = -4 \quad \Rightarrow \quad C(3, -4) \quad a = \sqrt{5} \quad b = \sqrt{3}$$

El eje focal es paralelo al eje X (¿Por qué?). El valor de c es:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5 + 3} = 2\sqrt{2}$$

En la fig. 9.36 se ubica el centro de la hipérbola y las distancias a , b y c . Esto permite determinar las coordenadas de los vértices y de los focos:

$$V(3 + \sqrt{5}, -4) \quad V'(3 - \sqrt{5}, -4)$$

$$F(3 + 2\sqrt{2}, -4) \quad F'(3 - 2\sqrt{2}, -4)$$

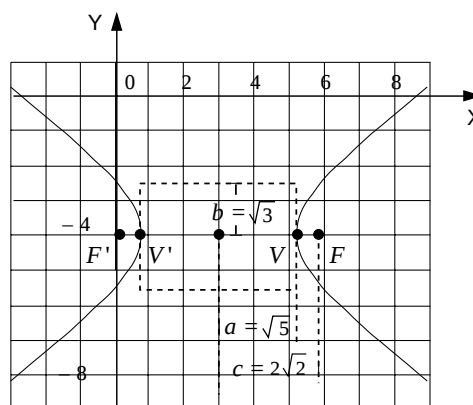


Fig. 9.36 Ubicación del centro de la hipérbola y distancia a , b y c . Ejemplo 9.14.

Las longitudes de los ejes transversos y conjugados son:

$$\text{Eje transverso: } L = 2a = 2\sqrt{5} \quad \text{Eje conjugado: } L = 2b = 2\sqrt{3}$$

$$\text{La excentricidad es: } e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h) \Rightarrow y + 4 = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}(x - 3)$$

En la fig. 9.36 se muestra la forma final de la curva.

* Ejercicios

9.12 Para la ecuación de cada hipérbola, determina la ecuación canónica, las coordenadas de los vértices y los focos, las longitudes de los ejes transversos y conjugados, la excentricidad y las ecuaciones de las asíntotas. Dibuja la gráfica correspondiente.

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{5} = 1$

b) $x^2 - y^2 = 8$

c) $7x^2 - 9y^2 = 63$

d) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$

e) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$

f) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y - 8 = 0$

g) $5x^2 - 2y^2 - 1 = 0$

h) $9x^2 - y^2 + 6y + 10 = 0$

i) $\frac{(y+1)^2}{8} - \frac{(x-3)^2}{5} = 1$

j) $2x^2 + 16x - 3y^2 + 6y - 35 = 0$

k) $x^2 - 8x - 5y^2 + 30y - 34 = 0$

l) $3x^2 - 18x - 2y^2 - 8y - 15 = 0$

9.13 Los vértices de una hipérbola son los puntos $(-3, 2)$ y $(-3, -2)$ y la longitud de su eje conjugado es 6. Determina la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos y su excentricidad.

9.14 El centro de una hipérbola es el punto $(1, 3)$ y su eje focal es paralelo al eje Y. Si las longitudes de los ejes transverso y conjugado son 6 y 4, determina su ecuación y dibuja la curva.

9.13 LA PARÁBOLA

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a una misma distancia de un punto dado F llamado *foco* y de una recta dada l llamada *directriz*.

La definición anterior es ilustrada en la fig. 9.37. El eje de la parábola es la recta que pasa por F y es perpendicular a l . El punto V , ubicado en el origen, es el *vértice* de la parábola. La distancia entre el vértice y el foco es p . De acuerdo con la definición, V está situado en el punto medio entre F y la directriz. La directriz, en este caso, tiene como ecuación:

$$x = -p \quad (9.35)$$

Las coordenadas del foco son $(p, 0)$ y las del punto A son $(-p, y)$. Si tomamos un punto cualquiera $P(x, y)$ sobre la parábola, éste debe satisfacer la condición:

$$d_{pF} = d_{pA}$$

De donde:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p \quad (9.36)$$

Desarrollando:

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \Rightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \Rightarrow y^2 = 4px$$

$$y^2 = 4px \quad (9.37)$$

que es la *ecuación canónica* de la parábola. Observa lo siguiente:

1. El punto origen, $P(0, 0)$ pertenece a la parábola.
2. La curva es simétrica con respecto al eje de las abscisas.
3. Los valores de x son igual o mayores que cero ($x \geq 0$).

Si $x \leq 0$, tal como se muestra en la fig. 9.38, la directriz tiene como solución:

$$x = p \quad (9.38)$$

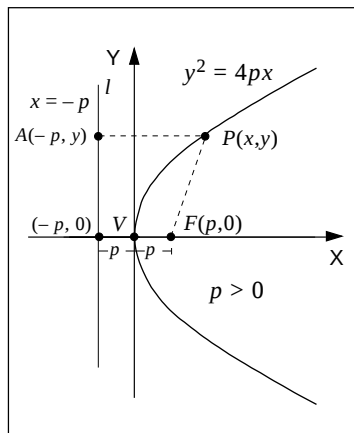


Fig. 9.37 Parábola con foco en $F(p, 0)$.

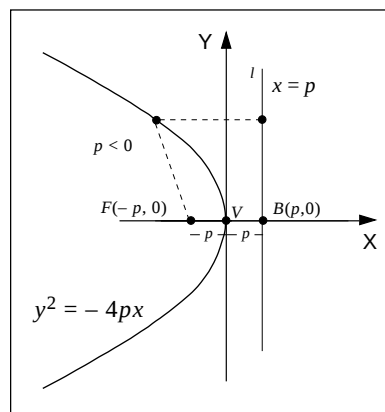


Fig. 9.38 Parábola con foco en $F(-p, 0)$.

y la ecuación de la parábola es:

$$y^2 = -4px \quad (9.39)$$

En el primer caso, $p > 0$, se dice que la parábola se abre hacia la derecha, mientras que cuando $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.

Si el vértice de la parábola está en el origen y su eje focal coincide con el eje Y, puede demostrarse que su ecuación es:

$$x^2 = 4py \quad (y \geq 0) \quad (9.40) \quad x^2 = -4py \quad (y \leq 0) \quad (9.41)$$

Si $y > 0$, la gráfica de la ecuación abre hacia arriba, fig. 9.39(a). Si $y < 0$, la gráfica de la ecuación abre hacia abajo, fig. 9.39(b).

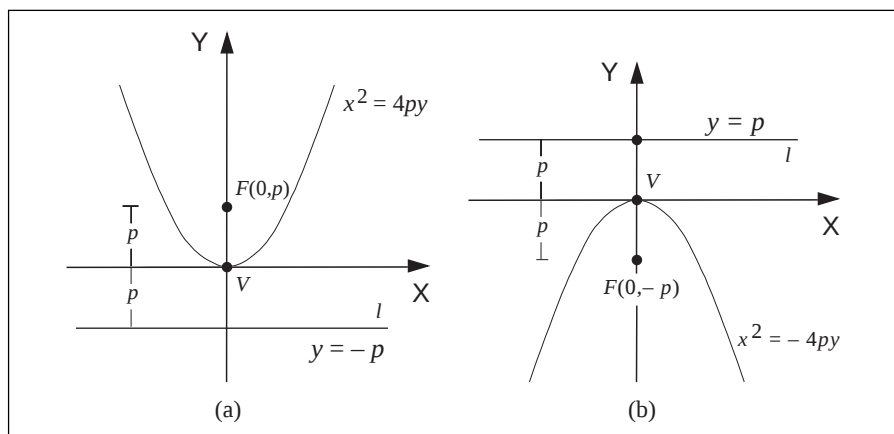


Fig. 9.39 Gráfica de la ecuación $x^2 = 4py$ cuando: a) $y \geq 0$. b) $y \leq 0$.

✱ EJEMPLO 9.15

Determina la ecuación de la parábola que cumple con las condiciones dadas. En cada caso dibuja la gráfica de la curva.

- Vértice en el origen y foco en $F(3, 0)$.
- Vértice en el origen y directriz $y - 1 = 0$.
- Vértice en el origen, su eje focal coincide con el eje X y pasa por el punto $(-2, 4)$. Determina en este caso las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

☆ Solución

a) Como las coordenadas del foco son $F(3, 0)$, la parábola tiene su eje focal coincidente con el eje X y su forma es $y^2 = 4px$ con $p = 3$:

$$y^2 = 4 \cdot 3x \Rightarrow y^2 = 12x$$

La ecuación de la directriz es: $y = -3$

Para facilitar el dibujo de la curva, tomamos algunos valores de x :

x	1	2	3
y	$\pm 2\sqrt{3}$	$\pm 2\sqrt{6}$	± 6

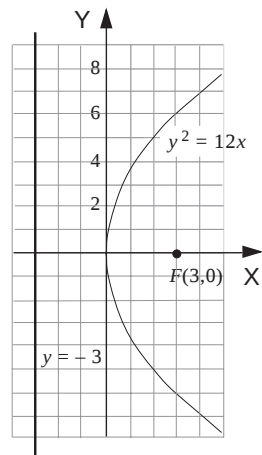


Fig. 9.40 Gráfica de la parábola $y^2 = 12x$ del ejemplo 9.15(a).

En la fig. 9.40 se muestra la gráfica.

b) Como la directriz es $y = 1$, la parábola tiene su eje focal coincidente con el eje Y, tal como se muestra en la fig. 9.41. De la figura, se concluye que:

$$p = -1 \quad F(0, -1)$$

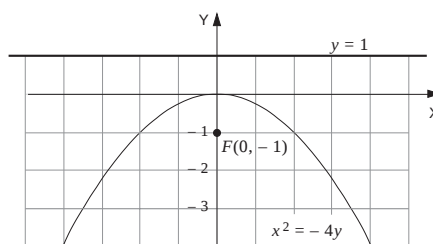


Fig. 9.41 Parábola del ejemplo 9.15(b).

La ecuación de la parábola tiene la forma de (9.37):

$$x^2 = 4py \Rightarrow x^2 = -4y$$

Dando algunos valores a y , obtenemos los de x :

y	-1	-2	-3	-4
x	± 2	$\pm 2\sqrt{2}$	$\pm 2\sqrt{3}$	± 4

c) Como la curva pasa por el punto $(-2, 4)$, sólo admite valores para $x \leq 0$. Por tanto, la parábola se abre hacia la izquierda (los valores de x son negativos) y su ecuación tiene la forma $y^2 = -4px$. El punto $(-2, 4)$ satisface esta última ecuación:

$$4^2 = -4p(-2) \Rightarrow p = 2$$

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

10.1 EL MÉTODO AXIOMÁTICO

A pesar que la Geometría es una de las ramas más importantes de la Matemática, su estudio en nuestros cursos, a nivel de enseñanza básica, ha sido tratado en forma muy superficial. La antigüedad de la Geometría se remonta a los babilonios y egipcios, pueblos que entre los años 2000 y 200 A.C. hicieron uso práctico de la misma como una respuesta a problemas cotidianos. Cuando surge la necesidad de efectuar medidas de objetos o extensiones de tierra, el hombre comienza a crear abstracciones como el punto, la recta y el plano. Se establece así un puente entre las formas que a diario el hombre observa y las representaciones simbólicas que utiliza para referirse a ellas. Así, por ejemplo, un terreno sin muchas irregularidades puede ser simbolizadas por un plano, mientras que sus límites podrían ser presentadas por rectas. Los conocimientos desarrollados por los babilonios y egipcios fueron transmitidos a la civilización griega, en cuyo seno no son sólo asimiladas, sino que son objeto de profundas reflexiones que produjeron avances significativos de la Geometría. Los griegos desarrollaron la Geometría como una ciencia lógica y fueron responsables de la demostración de muchos teoremas. A pesar de que los griegos desarrollaron otras áreas de la matemática, la Geometría fue perfeccionada a tal grado que la influencia de los antiguos matemáticos griegos se ha mantenido durante 20 siglos. Es la época de los grandes filósofos griegos entre quienes destacan Thales de Mileto, Pitágoras, Anaxágoras, Demócrito, Hipócrates, Platón.

El desarrollo de la Geometría alcanza su más alto nivel con Euclides de Alejandría con su obra "Los Elementos", donde expone rigurosamente los conocimientos geométricos de la época. Sobre la vida de Euclides se tiene muy poca información. Se sabe que vivió en Alejandría alrededor del año 300 A.C.

En "Los Elementos", obra formada por 13 libros, Euclides introduce el llamado *método axiomático*, que partiendo de ciertos *conceptos primitivos o no definidos* y de un número de tesis iniciales, aplica un razonamiento lógico para demostrar proposiciones geométricas. Fue tan sólo en el siglo XIX cuando la así llamada Geometría Euclidiana comenzó a ser revisada. El método axiomático es un método "deductivo", que permite, a partir de ciertos postulados básicos y mediante el uso de la lógica, deducir otras proposiciones.

La Geometría Euclidiana fue sometida a revisión en el siglo XIX cuando los matemáticos Lobatchewsky, Riemman, Peano y Klein hacen críticas y reformulan las bases fundamentales de dicha Geometría.

Los *axiomas*, conocidos también como *postulados*, son proposiciones que se aceptan sin prueba. Los *teoremas* son proposiciones que deben ser probados a partir de los axiomas, mediante razonamientos lógicos que conduzcan a la demostración buscada. Este método de prueba, basado en la lógica, se conoce como *método deductivo*.

Un *sistema axiomático* está formado por un conjunto de conceptos primitivos y de axiomas. El método axiomático que aplicamos al estudio de la Geometría es utilizado en otras ramas de la Matemática.

La selección de conceptos primitivos y axiomas en la construcción de una ciencia es, en cierta manera arbitraria, y esa escogencia puede dar lugar a diferencias notables en la naturaleza de la ciencia que resulta. Un sistema axiomático debe reunir las condiciones:

a. *Debe ser lo más intuitivo posible:* aunque la intuición a veces nos puede jugar malas pasadas, ver fig. 10.1, la simplificación que introduce cuando se desarrolla una teoría puede facilitar su creación.

b. *Compatibilidad:* la falsedad de un axioma no puede deducirse a partir de otros axiomas. Similarmente, no debe ser posible demostrar que una proposición dada y la negación de la misma son simultáneamente verdaderas. En otras palabras, no deben surgir contradicciones cuando se hace uso del sistema de axiomas.

c. *Independencia:* ningún axioma puede deducirse de otros axiomas, ya que de ser así, el primero no sería necesario.

Ya dijimos que los teoremas son proposiciones que pueden ser demostrados. En general, una *demostración* es un conjunto de deducciones que, partiendo de los conceptos primitivos y de los axiomas, conducen a probar la veracidad de la proposición. Es la demostración lo que nos lleva a establecer la generalidad de una proposición. Es decir, mediante la demostración podemos afirmar que lo que se trata de probar no sólo es aplicable a casos particulares.

Las siguientes definiciones son necesarias para el estudio de los axiomas

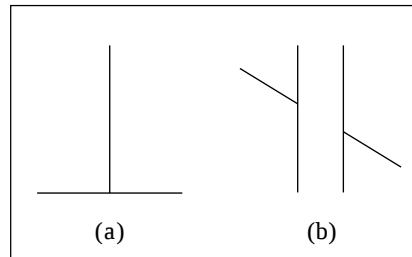


Fig. 10.1 La intuición puede a veces hacernos equivocar. a) La línea vertical parece más larga que la horizontal. b) Las dos líneas inclinadas parecen no estar sobre la misma recta.

y de los teoremas que abordaremos en la próxima sección.

Puntos colineales: son los que pertenecen a una misma recta (fig. 10.2(a)).

Puntos coplanarios: son aquellos que pertenecen a un mismo plano (fig. 10.2(b)).

Rectas coplanarias: son aquellas que pertenecen a un mismo plano (fig. 10.2(c)).

Rectas paralelas: son las que no tienen ningún punto común (fig. 10.2(d)).

Rectas concurrentes: son aquellas que sólo tienen un punto común. También se dicen que estas rectas son *secantes* o que se intersectan en un punto común, fig. 10.2(e).

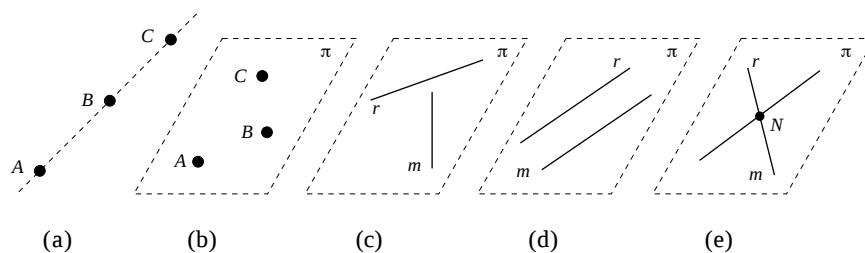


Fig. 10.2 a) Puntos colineales. b) Puntos coplanarios. c) Rectas coplanarias. d) Rectas paralelas. e) Rectas concurrentes o secantes. El punto N es el punto de intersección.

✧ EJEMPLO 10.1

Dados los puntos M , N , P y Q de la fig. 10.3, determina cuántas rectas pueden dibujarse a través de dos de los puntos mostrados.

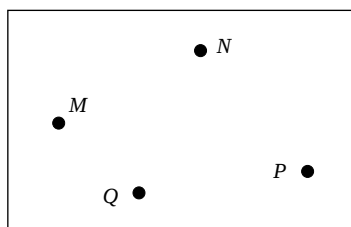


Fig. 10.3 ¿Cuántas rectas pueden dibujarse a través de dos de los puntos mostrados?

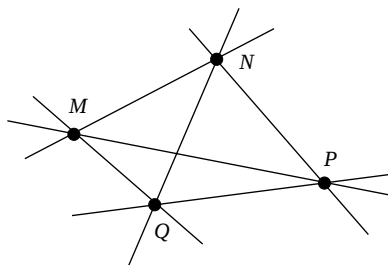


Fig. 10.4 Solución al ejemplo 10.1.

☆ Solución

Si los puntos no fuesen tomados de dos en dos, podrían dibujarse infinitas rectas, ya que por cada punto se pueden dibujar más de una recta. Como

los puntos han de tomarse en parejas, se pueden dibujar seis rectas, tal como se muestra en la fig. 10.4.

* Ejercicios

10.1 ¿Pueden los puntos y las líneas ser vistos? Explica y discute con tus compañeros de clase.

10.2 De acuerdo con tus experiencia cotidiana, da ejemplos de puntos, rectas y planos. Ubícalos en el espacio y trata de dibujarlos en un papel.

10.3 Critica las siguientes afirmaciones:

- a) Un punto es algo indivisible.
- b) Una línea no tiene principio ni fin.
- c) El espacio es ilimitado.
- d) Un punto es algo que no tiene magnitud.
- e) Un campo de fútbol es el espacio.
- f) La superficie marina en reposo es un plano.

10.4 Dados los puntos A, B, C, D y E no colineales, situados en un plano, ¿cuántas rectas pueden dibujarse a través de los mismos?

10.5 Dados los puntos A, B, C, D y E no colineales, situados en un plano, ¿cuántas rectas pueden dibujarse a través de los mismos, tomados en pares?

10.6 Dados los puntos M, N, P y Q no colineales, considerados en el espacio:
a) ¿cuántas rectas pueden dibujarse a través de los mismos, tomados de dos en dos? b) ¿cuántos planos pueden dibujarse por cada tres puntos?

10.7 ¿Cuántos planos pueden dibujarse que contengan a una misma recta r ?

10.8 ¿Pueden tres puntos ser coplanarios y no colineales?

10.9 ¿Pueden tres puntos ser colineales y no coplanarios?

A continuación, presentamos algunos axiomas de la Geometría Euclidiana y probaremos algunos teoremas basados en dichos axiomas.

AXIOMAS DE INCIDENCIA

Axioma 1: por dos puntos distintos del espacio pasa una y sólo una recta.

En la fig. 10.5 se muestra, en un plano, lo establecido por el axioma 1. Por los puntos A y B del plano (recuerda que el plano está incluido en el espacio) sólo es posible trazar la recta r . Utiliza la imaginación para ver una recta en el espacio. Por ejemplo, en tu salón de clases, el hilo de una lámpara colgando puede representar una recta. Sobre ella, también imaginariamente podrías colocar los puntos A y B .

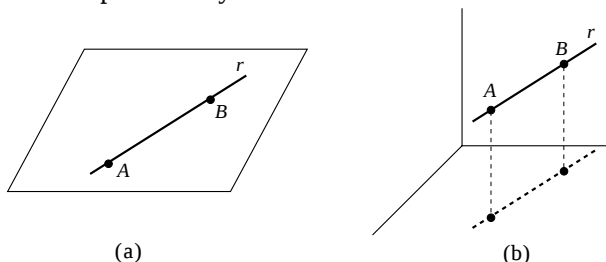


Fig. 10.5 (a) Recta en un plano. (b) Recta en el espacio.

Axioma 2: por tres puntos no colineales del espacio pasa un plano único.

En la fig. 10.6 se muestra este caso. Los puntos A , B y C no pertenecen a una misma recta, son, por tanto, no colineales. Los tres puntos están en un mismo plano y no es posible hacer pasar otro plano distinto por dichos puntos. Es decir, los puntos A , B y C determinan uno y sólo un plano que los contiene.

Axioma 3: Si una recta tiene dos de sus puntos en un plano, entonces toda la recta está contenida en el plano.

En la fig. 10.7 la recta r tiene dos puntos A y B en el plano π . Como puede observarse, todos los puntos de r pertenecen al plano π .

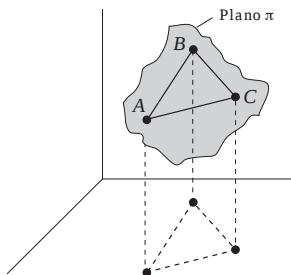


Fig. 10.6 Por los puntos A , B y C sólo es posible dibujar un único plano.

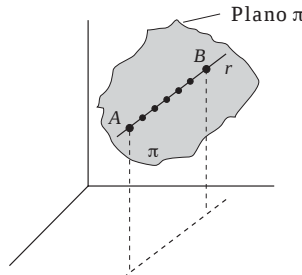


Fig. 10.7 Presentación del axioma 3. Todos los puntos de r pertenecen al plano π .

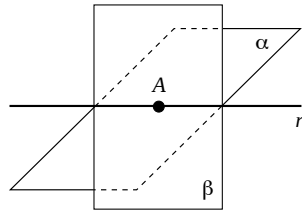


Fig. 10.8 Ilustración del axioma 4. Los planos α y β tienen en común al punto A y a la recta r que pasa por A .

Axioma 4: Dados dos planos distintos que tienen un punto común, A , tienen también común una recta que pasa por A .

En la fig. 10.8 ilustra el axioma 4. Los planos α y β pasan por el punto A originando, al cortarse, la recta r que también pasa por A .

A continuación, estudiaremos algunos teoremas y haremos uso de razonamientos lógicos, apoyados en los axiomas ya estudiados, para demostrar los mismos.

Teorema 1: Dada una recta r y un punto P , externos a r , hay un plano único que pasa por ellos.

Demostración: En la fig. 10.9(a) se muestra la recta r y el punto P , externo a la misma.

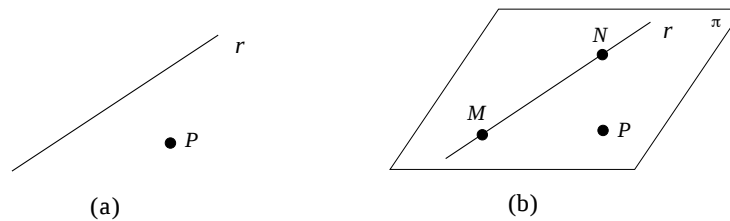


Fig. 10.9 Esquema para demostrar el teorema 1.

Según el axioma 1 ("por dos puntos distintos del espacio pasa una y sólo una recta"), sobre la recta r podemos considerar los puntos M y N , tal como se muestra en la fig. 10.9(b). Por el axioma 2 ("por tres puntos no colineales del espacio pasa un plano único"), los puntos M , N y P determinan un plano π , el cual contiene a la recta r y a todos los puntos de la misma.

Para confirmar que el plano π es el único que contiene a la recta r y al punto P , observamos que todo plano que contenga a P y a r , contiene a los puntos P , M y N y, por tanto, coincide con el plano π .

Teorema 2: si dos rectas distintas, p y r , son concurrentes, su intersección es un solo punto M .

Demostración: Para esta demostración haremos uso de un método denominado *reducción al absurdo* que consiste en negar lo afirmado en el teorema y concluir que esa negación conduce a una contradicción con algunos de los axiomas o teoremas ya probados.

Consideremos la fig. 10.10(a) y supongamos que exista, además de M , otro

punto N de intersección de p y r , como se muestra en la fig. 10.10(b).

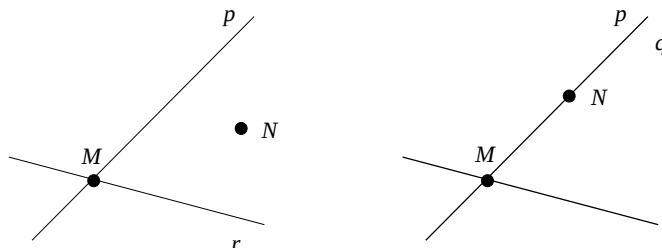


Fig. 10.10 Esquema gráfico para la demostración del teorema 2.

Como M y N pertenecen a las rectas p y r (ya que la solución son intersecciones de las mismas) y el axioma 1 establece que por dos puntos pasa una sola recta, las dos rectas p y q serían las mismas, ya que ambas pasarían por M y N , lo que contradice lo afirmado por el teorema en cuanto a que las rectas son distintas. De lo anterior se concluye que el punto M es único, como se plantea en el teorema 2.

Teorema 3: dos rectas, r y m que se intersectan en un punto P determinan un plano único π que las contiene.

Demostración: consideremos las rectas concurrentes r y m que se cortan en el punto P , tal como se muestra en la fig. 10.11. Como una recta está formada por un número infinito de puntos, podemos tomar el punto A sobre la recta r y el punto B sobre la recta m . De acuerdo con el axioma 2 ("por tres puntos no colineales del espacio pasa un plano único"), los puntos A , B y P determinan al plano π (Axioma 3: "Si una recta tiene dos de sus puntos en un plano, entonces toda la recta está contenida en el plano") y a la recta m , porque B y P pertenecen a π (Axioma 1).

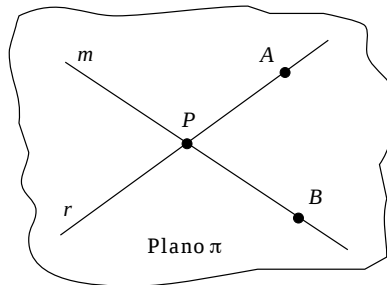


Fig. 10.11 Demostración del teorema 3.

* Ejercicios

10.10 Demuestra que, dados una recta r y un punto P no perteneciente a ella, existe un plano único que los contiene.

10.11 Demuestra que, dada la recta r , existen al menos dos planos que la contiene.

10.12 Dadas dos rectas que se intersectan, demuestra que sólo existe un plano y sólo uno que las contiene.

AXIOMAS DE PARALELISMO

Ya vimos que por definición dos rectas son paralelas si no tienen ningún punto común. Para expresar que las rectas r y m son paralelas, escribimos: $r \parallel m$. Las siguientes definiciones complementan a las dadas anteriormente.

Recta paralela a un plano: una recta r se dice que es paralela a un plano π (expresado como $r \parallel \pi$) si bien r está contenida en π o bien r no interseca a π . La fig. 10.12 muestra los dos casos.

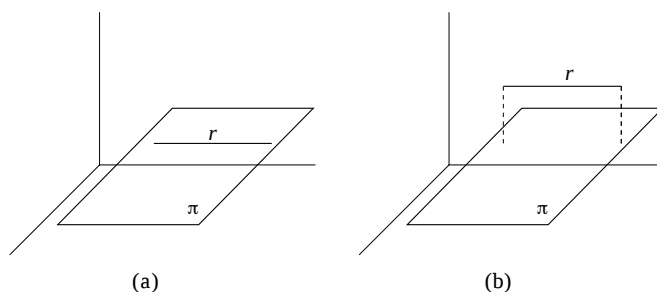


Fig. 10.12 Recta paralela a un plano: a) r está contenida en π . b) r no interseca a π .

Planos paralelos: se dice que dos planos distintos, α y β , son paralelos si no tienen ningún punto común. Cuando dos planos no son paralelos se cortan en una línea recta. En la fig. 10.13 se muestran ambos casos.

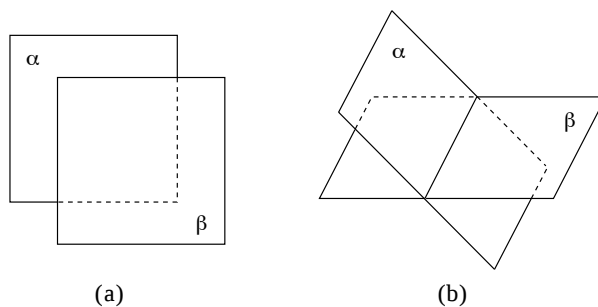


Fig. 10.13 a) Planos paralelos. b) Planos no paralelos.

Axioma de Euclides: dada la recta r y un punto P externo a ella pertenecientes ambos a un plano π , solo se puede dibujar por P una única recta paralela a r .

10.2 ECUACIÓN DE LA RECTA EN EL ESPACIO

Para describir una línea recta en el espacio, se necesita conocer cualquiera de las siguientes condiciones.

- a. Un punto por donde pasa la recta y su dirección.
- b. Dos puntos por donde pasa la recta.

En el primer caso, la dirección de la recta puede ser establecida por intermedio de un vector paralelo a la recta. Para establecer la ecuación de la recta en el espacio, consideremos un sistema de coordenadas rectangulares, una recta situada en ese sistema y un vector de posición $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, tal como se muestra en la fig. 10.14. Los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ pertenecen a la recta l que es paralela al vector de posición $\vec{a}$. Como l es paralela a $\vec{a}$, el vector $\overrightarrow{P_1P}$ es también paralelo al vector $\vec{a}$. Esta condición puede ser expresada mediante la relación:

$$\overrightarrow{P_1P} = t\vec{a} \quad (10.1)$$

donde t es un escalar.

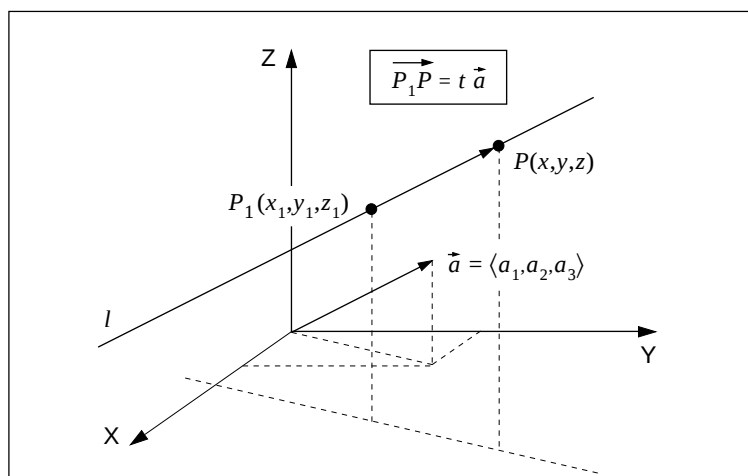


Fig. 10.14 Esquema para determinar la ecuación de la recta en el espacio.

El vector $\overrightarrow{P_1P}$ se puede expresar como:

$$\langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = t \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \quad (10.2)$$

o también:

$$\langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = \langle ta_1, ta_2, ta_3 \rangle \quad (10.3)$$

Igualando las componentes:

$$x - x_1 = ta_1 \quad y - y_1 = ta_2 \quad z - z_1 = ta_3 \quad (10.4)$$

Despejando x , y y z obtenemos las *ecuaciones paramétricas* de la recta en el espacio. t es el *parámetro*. Los puntos $P_i(x_i, y_i, z_i)$ sobre la recta l se obtienen asignando a t valores reales:

$$t = t_i \quad x = x_1 + a_1 t_i \quad y = y_1 + a_2 t_i \quad z = z_1 + a_3 t_i \quad (10.5)$$

Cualquier otro vector paralelo a $\vec{a}$ da origen a la misma recta, ya que:

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} = \lambda \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3 \rangle \quad (10.6)$$

y las ecuaciones paramétricas con u como parámetro son:

$$x = x_1 + (\lambda a_1)u \quad y = y_1 + (\lambda a_2)u \quad z = z_1 + (\lambda a_3)u \quad (10.7)$$

que determinan la misma recta, ya que podemos hacer $u = \frac{t}{\lambda}$ y obtener las ecuaciones dadas por (10.5).

Para dibujar la recta en el espacio, se dan valores al parámetro t y se obtienen los puntos correspondientes a x , y y z .

✱ EJEMPLO 10.3

Determina la ecuación de la recta l que pasa por P y es paralela al vector $\vec{a}$:

$$\text{a) } P(1, -2, 5) \quad \vec{a} = \langle 1, 4, -1 \rangle \quad \text{b) } P(1, 4, 3) \quad \vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

¿Dónde corta l al plano XZ ? Dibuja el vector $\vec{a}$ y la recta l .

☆ Solución

a) De los datos podemos escribir:

$$x_1 = 1 \quad y_1 = -2 \quad z_1 = 5 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = 4 \quad a_3 = -1$$

Las ecuaciones paramétricas son, de acuerdo a (10.4):

$$x = 1 + t \quad y = -2 + 4t \quad z = 5 - t$$

Para $t = 0$ y $t = 1$ se obtienen los siguientes valores para x , y y z .

$$t = 0 \Rightarrow x = 1 \quad y = -2 \quad z = 5 \quad P_1(1, -2, 5)$$

$$t = 1 \Rightarrow x = 2 \quad y = 2 \quad z = 4 \quad P_2(2, 2, 4)$$

En la fig. 10.15 se muestran los puntos P_1 y P_2 y la recta que pasa por los

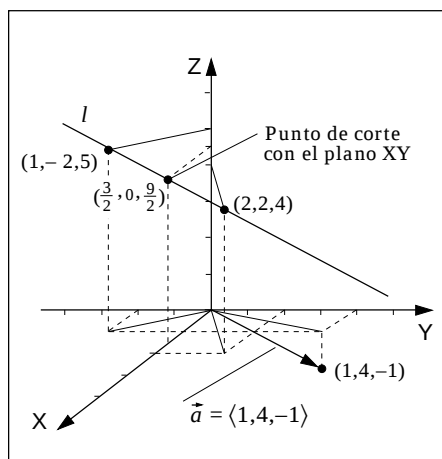


Fig. 10.15 Representación gráfica de la recta l y del vector $\vec{a}$ del ejemplo 10.2(a).

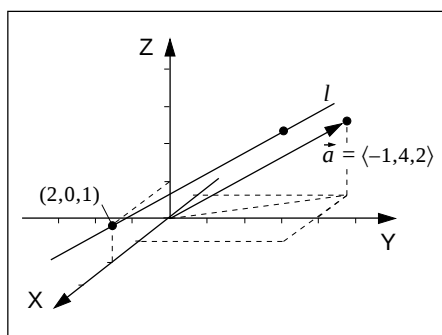


Fig. 10.16 Representación gráfica de la recta l y del vector $\vec{a}$ del ejemplo 10.2(b).

En la fig. 10.16 se muestran al vector $\vec{a}$ y la gráfica de la ecuación. El punto de corte con el plano XZ es $P(2, 0, 1)$.

Para hallar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por dos puntos, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, fig. 10.17, se determina el vector dirigido desde P_1 a P_2 dado por:

$$\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle \quad (10.8)$$

El vector $\overrightarrow{PP_1}$ es:

$$\overrightarrow{PP_1} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle \quad (10.9)$$

mismos, así como el vector $\vec{a}$. Como puedes ver, $\vec{a}$ es paralelo a la recta l . Para determinar el punto de corte de la recta l con el plano XZ, hacemos $y = 0$ en las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -2 + 4t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$x = 1 + t = \frac{3}{2} \quad z = 5 - t = \frac{9}{2}$$

Luego, el punto de corte con el plano XZ es $P(\frac{3}{2}, 0, \frac{9}{2})$.

b) El vector $\vec{a}$ puede expresarse como $\vec{a} = \langle -1, 4, 2 \rangle$ y las ecuaciones paramétricas son:

$$x = 1 - t \quad y = 4 + 4t \quad z = 3 + 2t$$

Si $t = 0$, obtenemos:

$$x = 1 \quad y = 4 \quad z = 3 \Rightarrow P_1(1, 4, 3)$$

Si $t = -1$:

$$x = 2 \quad y = 0 \quad z = 1 \Rightarrow P_2(2, 0, 1)$$

Como la recta l es paralela al vector $\vec{a}$:

$$\langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = t \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle \quad (10.10)$$

Se tiene entonces:

$$x - x_1 = (x_2 - x_1) t \Rightarrow x = x_1 + (x_2 - x_1) t \quad (10.11)$$

$$y - y_1 = (y_2 - y_1) t \Rightarrow y = y_1 + (y_2 - y_1) t \quad (10.12)$$

$$z - z_1 = (z_2 - z_1) t \Rightarrow z = z_1 + (z_2 - z_1) t \quad (10.13)$$

Las tres relaciones anteriores permiten determinar las ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio, conocidos dos puntos por donde pasa la recta.

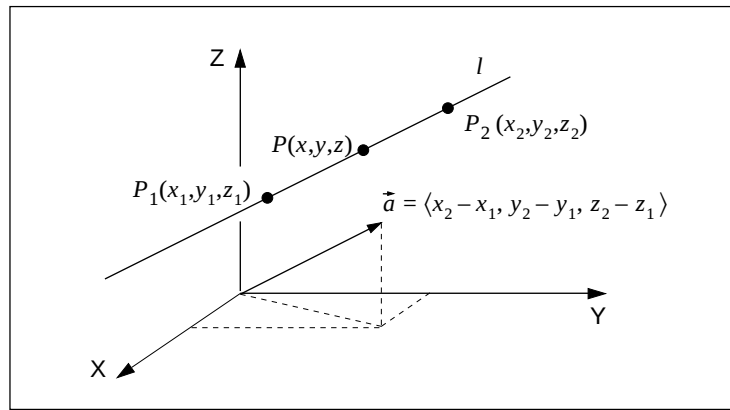


Fig. 10.17 Esquema para determinar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

✱ EJEMPLO 10.4

Determina las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos dados, dibuja la recta y encuentra los puntos de corte con los planos coordenados.

$$P_1(5, -2, 4)$$

$$P_2(2, 6, 1)$$

☆ Solución

Usando las relaciones (10.20) a (10.22), con $P_1(5, -2, 4)$ y $P_2(2, 6, 1)$:

$$x = 5 - 3t \quad y = -2 + 8t \quad z = 4 - 3t$$

Dando valores a t :

$$t = 0 \Rightarrow x = 5 \quad y = -2 \quad z = 4 \quad P_1(5, -2, 4)$$

$$t = 1 \Rightarrow x = 2 \quad y = 6 \quad z = 1 \quad P_2(2, 6, 1)$$

En la fig. 10.18 se presenta la gráfica correspondiente. El punto de corte con el plano XZ se obtiene haciendo $y = 0$:

$$y = 0 \Rightarrow 0 = -2 + 8t \Rightarrow t = \frac{1}{4}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de x y z :

$$x = 5 - \frac{3}{4} = \frac{17}{4} \quad z = 4 - \frac{3}{4} = \frac{13}{4}$$

El punto de corte con el plano XZ es entonces, $P(4,25; 0; 3,25)$. Para el plano XY:

$$z = 0 \quad 4 - 3t = 0 \Rightarrow t = \frac{4}{3} \quad x = 5 - 4 = 1 \quad y = -2 + \frac{32}{3} = \frac{26}{3}$$

El punto de corte es $P(1; 8,7; 0)$.

Para el plano ZY:

$$x = 0 \quad t = \frac{5}{3} \quad y = -2 + \frac{40}{3} = \frac{34}{3} \quad z = 4 - 5 = -1$$

El punto de corte es $P(0; 11,33; -1)$. Los puntos de corte con los planos XY y ZY no se representan en la fig. 10.18 por salirse del área del dibujo.

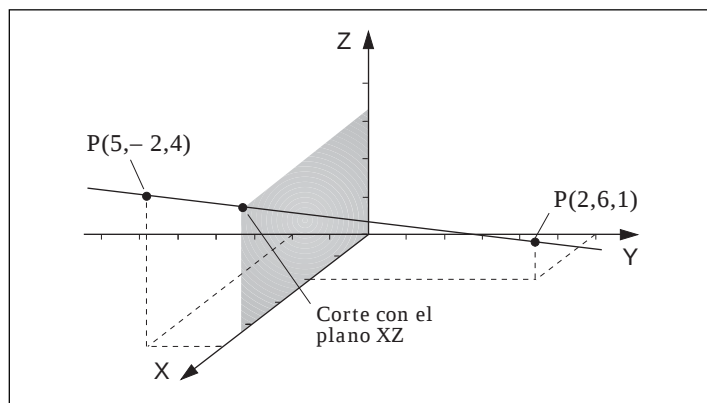


Fig. 10.18 Gráfica de la recta para el ejemplo 10.3.

10.3 ECUACIÓN DEL PLANO

La ecuación de un plano es una relación matemática que permite describir la gráfica del mismo en un sistema tridimensional. Dicha ecuación puede

obtenerse si se conocen un punto por donde pasa el plano y un vector perpendicular al mismo. En la fig. 10.19 se muestra un plano π que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y un vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ perpendicular al plano en P_1 . Si se toma sobre el plano π un punto cualquiera, $P(x, y, z)$, el vector $\overrightarrow{P_1P}$ es perpendicular al vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ por estar el primero contenido en el plano π . Los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_1P}$ pueden expresarse como:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle \quad \overrightarrow{P_1P} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle \quad (10.14)$$

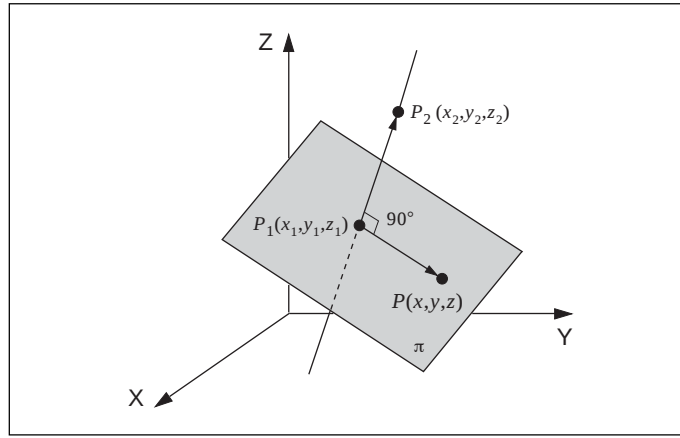


Fig. 10.19 Dibujo para determinar la ecuación de un plano.

De acuerdo con lo estudiado anteriormente, el producto escalar de dos vectores es igual a cero si los mismos son perpendiculares. Si llamamos:

$$a_1 = x_2 - x_1 \quad a_2 = y_2 - y_1 \quad a_3 = z_2 - z_1 \quad (10.15)$$

y efectuamos $(\overrightarrow{P_1P_2}) \cdot (\overrightarrow{P_1P})$, obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \cdot \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle &= 0 \\ a_1(x - x_1) + a_2(y - y_1) + a_3(z - z_1) &= 0 \end{aligned} \quad (10.16)$$

A los números a_1 , a_2 y a_3 se les conoce como *números directores* del vector perpendicular al plano.

Haciendo operaciones en (10.25), se obtiene:

$$a_1x + a_2y + a_3z - (a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1) = 0 \quad (10.17)$$

La cantidad $-(a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1)$ es una constante que designaremos por

la letra D . Si, además, hacemos $A = a_1$, $B = a_2$ y $C = a_3$, la ecuación (10.26) puede escribirse como:

$$A x + B y + C z + D = 0 \quad (10.18)$$

La relación anterior es la *ecuación general del plano* perpendicular al vector $\langle A, B, C \rangle$.

✱ EJEMPLO 10.5

Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $P_1(1, 2, 1)$ y es perpendicular al vector $\vec{a} = \langle 4, 3, 2 \rangle$. Dibuja el vector de posición correspondiente a $\vec{a}$ y el plano.

☆ Solución

Se tiene:

$$a_1 = 4 \quad a_2 = 3 \quad a_3 = 2 \quad x_1 = 1 \quad y_1 = 2 \quad z_1 = 1$$

De acuerdo con la relación (10.25), la ecuación del plano es:

$$4(x - 1) + 3(y - 2) + 2(z - 1) = 0$$

o, también:

$$4x + 3y + 2z = 12$$

Para dibujar el plano, buscamos los puntos de corte con los ejes coordenados:

$$x = y = 0 \Rightarrow z = 6 \quad P(0, 0, 6)$$

$$x = z = 0 \Rightarrow y = 4 \quad P(0, 4, 0)$$

$$y = z = 0 \Rightarrow x = 3 \quad P(3, 0, 0)$$

En la fig. 10.20 se muestra el triángulo dado por los puntos anteriores y que está contenido en el plano buscado. Se representa, además, el vector $\vec{a}$.

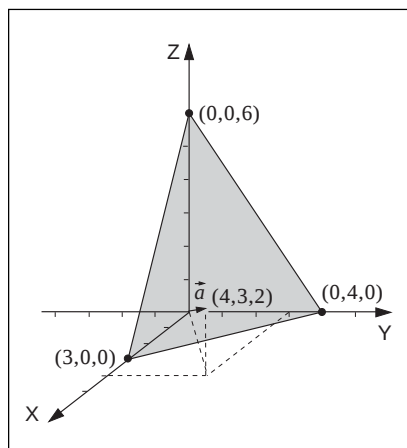


Fig. 10.20 Plano y vector para el ejemplo 10.4.

✱ EJEMPLO 10.6

Determina la ecuación del plano que pasa por los puntos:

$$\mathbf{a) } P(0, 0, 0) \quad Q(0, 2, 5) \quad R(1, 4, 0)$$

$$\text{b) } P(3, 5, 4) \quad Q(0, 0, 6) \quad R(2, -3, 4)$$

☆ Solución

a) En la fig. 10.21 se muestran los tres puntos a través de los cuales pasa el plano. Para determinar la ecuación del plano, encontraremos un vector perpendicular al mismo. Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ que yacen en el plano pueden expresarse como:

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 0, 2, 5 \rangle = 0\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = \langle 1, 4, 0 \rangle = \vec{i} + 4\vec{j} + 0\vec{k}$$

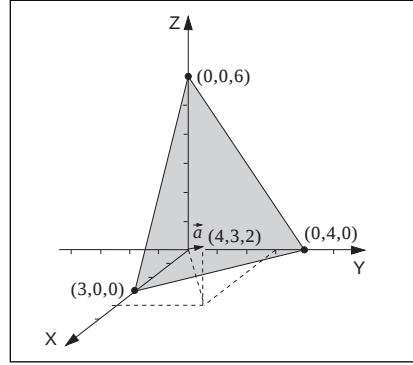


Fig. 10.21 Plano del ejemplo 10.5(a).

El vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular al plano que pasa por P , Q y R . Como se estudió en el capítulo 5, sección (5.8), el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ puede determinarse a partir de:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(-20) - \vec{j}(-5) + \vec{k}(-2) = -20\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$$

Luego, un vector $\vec{a}$, perpendicular al plano, es:

$$\vec{a} = \langle -20, 5, -2 \rangle \Rightarrow a_1 = -20 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = -2$$

Si tomamos $P_1(0, 0, 0)$ y usamos (10.25), la ecuación del plano es:

$$-20x + 5y - 2z = 0 \Rightarrow 20x - 5y + 2z = 0$$

b) En la fig. 10.22 se muestran los puntos dados por los cuales pasa el plano.

Los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son:

$$\overrightarrow{PQ} = \langle -3, -5, -2 \rangle = -3\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\overrightarrow{PR} = \langle -1, -8, 0 \rangle = -\vec{i} - 8\vec{j} + 0\vec{k}$$

El vector $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ es perpendicular al plano buscado. Este valor está dado por:

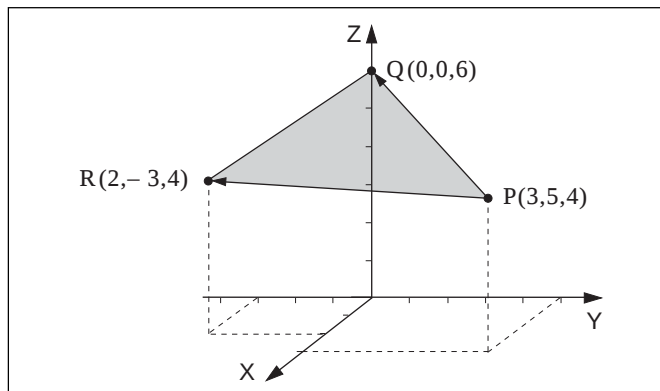


Fig. 10.22 Los puntos del ejemplo 10.20(b) determinan el triángulo mostrado que pertenece al plano cuya ecuación se pide.

$$\vec{a} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -5 & 2 \\ -1 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \vec{i}(0 + 16) - \vec{j}(0 + 2) + \vec{k}(24 - 5) = 16\vec{i} - 2\vec{j} + 19\vec{k}$$

$$\vec{a} = \langle 16, -2, 19 \rangle \quad \Rightarrow \quad a_1 = 16 \quad a_2 = -2 \quad a_3 = 19$$

Si $P_1(3, 5, 4)$ y usamos (10.25):

$$16(x - 3) - 2(y - 5) + 19(z - 4) = 0$$

$$16x - 2y + 19z + (-48 + 10 - 76) = 0 \quad \Rightarrow \quad 16x - 2y + 19z = 124$$

✱ EJEMPLO 10.7

Determina el ángulo que forman los planos:

$$2x + 3y + 6z = 7$$

$$3x - 5y + 4z = 2$$

☆ Solución

El ángulo entre los planos puede hallarse determinando el ángulo que forman vectores perpendiculares a los mismos. Esos vectores están dados por:

Plano 1: $2x + 3y + 6z = 7$ Vector perpendicular: $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$

Plano 2: $3x - 5y + 4z = 2$ Vector perpendicular: $\vec{v} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$

El producto escalar de los dos vectores está dado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u v \cos \theta = \langle 2, 3, 6 \rangle \cdot \langle 3, -3, 4 \rangle = 6 - 15 + 24 = 15$$

donde θ es el ángulo entre los vectores y u y v los módulos de los mismos, dados por:

$$u = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7 \qquad v = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} = 7,07$$

Luego:

$$\cos \theta = \frac{15}{7 \cdot 7,07} = 0,30 \Rightarrow \theta \approx 72,4^\circ$$

✱ EJEMPLO 10.8

Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $(2, -3, 5)$ y es paralelo al plano cuya ecuación es:

$$3x + 5y - z = 4$$

☆ Solución

Como el plano buscado es paralelo al dado, sus números directores $(3, 5, -1)$ son iguales y usando (10.25):

$$3(x - 2) + 5(y + 3) - 1(z - 5) = 0 \Rightarrow 3x + 5y - z = -14$$

10.4 FORMA SIMÉTRICA DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA

Las ecuaciones paramétricas de la recta en el espacio son:

$$x = x_1 + t a_1 \qquad y = y_1 + t a_2 \qquad z = z_1 + t a_3$$

Si en las ecuaciones anteriores despejamos el parámetro t , obtenemos:

$$t = \frac{x - x_1}{a_1} \qquad t = \frac{y - y_1}{a_2} \qquad t = \frac{z - z_1}{a_3} \qquad (10.19)$$

Las relaciones anteriores permiten escribir la *forma simétrica de la ecuación de la recta*:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \qquad (10.20)$$

Tomando las ecuaciones anteriores en pares:

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} \Rightarrow a_2 x - a_1 y + (a_1 y_1 - a_2 x_1) = 0 \qquad (10.21)$$

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{z - z_1}{a_3} \quad \Rightarrow \quad a_3 x - a_1 z + (a_1 z_1 - a_3 x_1) = 0 \quad (10.22)$$

Las relaciones (10.21) y (10.22) corresponden a ecuaciones de planos con los coeficientes en z y y respectivamente iguales a cero. Para la relación (10.21) un vector perpendicular al plano XY es $\langle a_2, a_1, 0 \rangle$, porque el producto:

$$(a_2 \vec{i} + a_1 \vec{j} + 0 \vec{k}) \cdot (\vec{i}) = 0$$

Similarmente, (10.22) representa un plano perpendicular al plano XZ. Por tanto, podemos afirmar que la representación de una recta en el espacio puede estar dada por dos planos perpendiculares a los planos XY y XZ.

✱ EJEMPLO 10.9

Determina la forma simétrica de la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(5, -2, 4)$ y $P_2(2, 6, 1)$.

☆ Solución

Un vector $\vec{a}$, correspondiente a $\overrightarrow{P_1 P_2}$ es:

$$\vec{a} = \langle 2 - 5, 6 + 2, 1 - 4 \rangle = \langle -3, 8, -3 \rangle$$

La representación paramétrica de la recta es:

$$x = 5 - 3t \quad y = -2 + 8t \quad z = 4 - 3t$$

Despejando t e igualando los resultados:

$$\frac{x - 5}{-3} = \frac{y + 2}{8} = \frac{z - 4}{-3}$$

que es la ecuación simétrica de la recta.

✱ Ejercicios

10.13 Determina la ecuación de la recta en el espacio que pasa por el punto y es paralela al vector dado.

a) $(-1, 2, 5);$ $\langle 3, -2, 4 \rangle$ **b)** $(0, -5, 7);$

$3\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

c) $(-5, 2, -3);$ $\langle 4, 6, 2 \rangle$ **d)** $(1, 1, 1); \langle 0, 1, 0 \rangle$

En cada caso dibuja la recta en el espacio.

10.14 Determina la ecuación general de la recta que pasa por los puntos:

a) $(2, 3, 4); (-2, 4, 5)$ **b)** $(-4, 0, 0); (-5, 4, -2)$ **c)** $(2, -1, -2); (3, 0, 2)$

d) $(1, 3, 5); (-2, 4, 6)$

Escribe las ecuaciones paramétricas y dibuja, en los casos anteriores, la recta correspondiente.

10.15 Determina la ecuación de la recta: **a)** Que pasa por $(5, -2, 3)$ y es perpendicular al plano $3x - 2y + z = 5$. **b)** Que pasa por $(2, 2, 2)$ y es paralela al eje Y . **c)** Que pasa por $(0, 0, 0)$ y es perpendicular al plano ZY .

10.16 Determina la ecuación del plano que satisface las siguientes condiciones. Dibuja en cada caso el plano.

a) Pasa por el punto P y es perpendicular al vector dado:

a.1 $P(3, -1, 4)$ $\vec{u} = \langle 2, -1, 3 \rangle$ **a.2** $P(3, -5, 4)$ $\vec{u} = \langle 3, -2, 1 \rangle$

a.3 $P(1, 3, 5)$ $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ **a.4** $P(0, 1, 0)$ $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

b) Intercepta a los ejes coordenados en los puntos 2, 3 y 5.

c) Pasa a través de los puntos:

c.1 $(0, 0, 0); (2, 2, 2); (3, 4, 5)$ **c.2** $(1, 1, 0); (0, 1, 1); (1, 0, 1)$

c.3 $(3, 2, 5); (-2, -3, 4); (2, 4, 5)$ **c.4** $(4, -3, 5); (0, 0, 4); (-2, 4, 6)$

d) Pasa por $(0, 1, 2)$ y es paralelo al plano $2x - 3y + 5z + 4 = 0$.

e) Pasa por $(2, 4, 6)$ y es paralelo al plano YZ .

10.17 Determina los interceptos de los siguientes planos con los ejes coordenados:

a) $x - 2y + 3z = 4$

b) $3x + 2y - 6z = 12$

10.18 Determina si los planos dados son paralelos o perpendiculares. Si no es así, determina el ángulo que forman:

a) $2x - y + 4z = 0$

$6x - 3y + 12z = 7$

b) $x - y + z + 4 = 0$

$x + y + 2z = 0$

c) $3x - 4z = 7$

$12y - 5z = 6$

EL TEOREMA DEL BINOMIO

11.1 DEFINICIÓN DE FACTORIALES

Si n es un número entero positivo, se define $n!$, expresado como "*ene factorial*" de la manera siguiente:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (11.1)$$

También definimos, por conveniencia, para el número cero:

$$0! = 1 \quad (11.2)$$

Entonces, el factorial de un número entero n es igual al producto de n y todos los enteros positivos menores que n . Por ejemplo:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad 10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

La definición $0! = 1$ amplía la utilidad de la notación factorial. Observa, de la definición, que si tomamos un número entero positivo cualquiera, por ejemplo $6!$, podemos escribir:

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{5!} = 6 \cdot 5!$$

Similarmente:

$$\begin{aligned} 6! &= 6 \cdot 5 \cdot \underbrace{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{4!} = 6 \cdot 5 \cdot 4! = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \underbrace{3 \cdot 2 \cdot 1}_{3!} = \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! \end{aligned}$$

Lo anterior permite escribir la siguiente *fórmula recursiva* para factoriales:

$$(n+1)! = (n+1)n! \quad (11.3)$$

que podemos escribir como:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (11.4)$$

Si hacemos una pequeña tabla de factoriales, obtenemos, hasta el número 8, lo siguiente:

0!	1!	2!	3!	4!	5!	6!	7!	8!
0	1	2	6	24	120	720	5.040	40.320

Se observa que después de 8! los valores obtenidos se incrementan notablemente. Así, por ejemplo:

$$10! = 8! \cdot 9 \cdot 10 = 40.320 \cdot 9 \cdot 10 = 3.628.800$$

11.2 NÚMEROS COMBINATORIOS

Dados los números enteros y positivos m y n , con $m \geq n$ y $m > 0$, definiremos como *número combinatorio* a la expresión:

$$\frac{m!}{n!(m-n)!} \quad (11.5)$$

donde: m : base o numerador del número combinatorio.

n : orden o denominador del número combinatorio

Al número combinatorio dado por (11.5) se le representa mediante el símbolo $\binom{m}{n}$. Entonces:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \quad (11.6)$$

✱ EJEMPLO 11.1

Determina el valor de los siguientes números combinatorios:

a) $\binom{7}{4}$

b) $\binom{4}{0}$

c) $\binom{8}{1}$

d) $\binom{12}{10}$

☆ Solución

De acuerdo a (11.6) se tiene:

a) $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$

$$\text{b)} \binom{4}{0} = \frac{4!}{0!(4-0)!} = \frac{4!}{1! \cdot 4!} = 1$$

$$\text{c)} \binom{8}{1} = \frac{8!}{1!(8-1)!} = \frac{8 \cdot 7!}{1! \cdot 7!} = 8$$

$$\text{d)} \binom{12}{10} = \frac{12!}{10!(12-10)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 2!} = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$$

Un número combinatorio presenta las siguientes propiedades:

a) Si el denominador de un número combinatorio es cero, su valor es 1. En efecto:

$$\text{con } n = 0 \Rightarrow \binom{m}{0} = \frac{m!}{0!(m-0)!} = \frac{m!}{1! \cdot m!} = 1$$

b) Si el orden es igual a 1, su valor es igual al numerador:

$$\text{con } n = 1 \Rightarrow \binom{m}{1} = \frac{m!}{1!(m-1)!} = \frac{m(m-1)!}{1! \cdot (m-1)!} = m$$

c) Dos números combinatorios de igual denominador y tales que la suma de sus denominadores sea igual al numerador común, son iguales. Dichos números se dice que son *complementarios*. Son ejemplos de números complementarios $\binom{7}{3}$ y $\binom{7}{4}$, ya que:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4!} = 35$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$$

En general, los números combinatorios $\binom{m}{n}$ y $\binom{m}{n-1}$ son iguales porque:

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \qquad \binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)![m-(m-n)]!} = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

d) La adición de dos números combinatorios de igual numerador, m , y cuyos denominadores difieren en 1, resulta en otro número combinatorio

de numerador igual a $m + 1$ y de denominador igual al mayor de los denominadores. Por ejemplo:

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$$

Si sumamos y , de acuerdo con los resultados anteriores, obtenemos:

$$\binom{9}{5} + \binom{9}{6} = 126 + 84 = 210$$

La propiedad (d) nos dice que $\binom{9}{5} + \binom{9}{6} = \binom{10}{6}$. En efecto:

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$

que es el mismo resultado anterior.

En general, si sumamos los números $\binom{m}{n}$ y $\binom{m}{n-1}$, obtenemos:

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \frac{m!}{n!(m-n)!} + \frac{m!}{(n+1)!(m-n-1)!} \quad (11.7)$$

Multiplicando numerador y denominador por $n + 1$, el primer término de la relación anterior puede escribirse como:

$$\frac{(n+1)m!}{(n+1)n!(m-n)!} = \frac{(n+1)m!}{(n+1)!(m-n)!} \quad (11.8)$$

Multiplicando del segundo término de la relación (11.7) por $(m - n)$:

$$\frac{(m-n)m!}{(n+1)!(m-n)(m-n-1)!} = \frac{(m-n)m!}{(n+1)!(m-n)!} \quad (11.9)$$

Sumando (11.8) y (11.9):

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)m!}{(n+1)!(m-n)!} + \frac{(m-n)m!}{(n+1)!(m-n)!} &= \frac{m!(n+1+m-n)}{(n+1)!(m-n)!} = \\ &= \frac{m!(m+1)}{(n+1)!(m-n)!} = \frac{(m+1)!}{(n+1)!(m-n)!} \end{aligned}$$

Este último resultado corresponde al número combinatorio $\binom{m+1}{n+1}$ y prueba la propiedad enunciada. Una aplicación directa de esta propiedad permite escribir el llamado *triángulo de Pascal* que utilizaremos posteriormente en este capítulo. Dicho triángulo se muestra en la fig. 11.1(a), con sus filas formadas por números combinatorios y cuyos valores se muestran en la fig. 11.1(b).

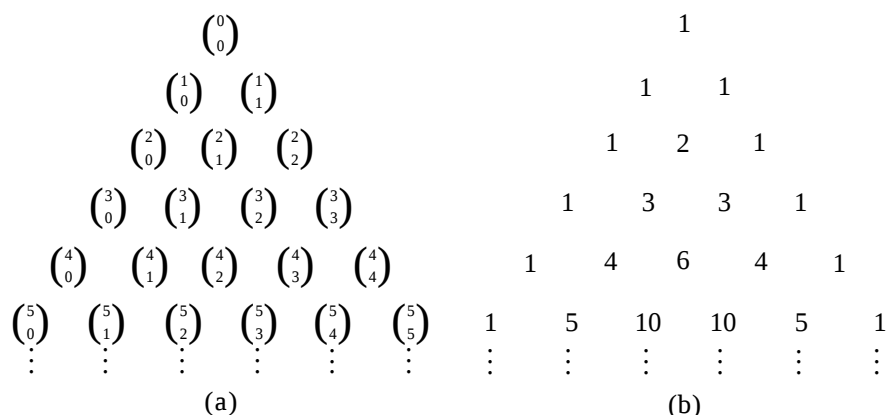


Fig. 11.1 Triángulo de Pascal. (a) Con números combinatorios. (b) Con los valores de los números correspondientes.

Observa que cada número combinatorio en el triángulo de Pascal se obtiene sumando los dos números que se encuentran diagonalmente encima de él.

11.3 EL TEOREMA DEL BINOMIO

El teorema del binomio nos permite obtener el desarrollo del binomio $(x + y)^m$, donde m es un número entero positivo. Para valores pequeños de m , $(x + y)^m$ puede determinarse fácilmente:

$$(x + y)^1 = x + y = \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$$

$$\begin{aligned}
 (x + y)^4 &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 \\
 &= \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5
 \end{aligned}$$

De los desarrollos anteriores, podemos observar lo siguiente:

1. Los coeficientes de los diferentes términos corresponden a los elementos de las filas del triángulo de Pascal. Así, por ejemplo, los coeficientes de los términos de $(x + y)^4$ son los elementos de la cuarta fila del triángulo de Pascal.
2. El número de términos es una unidad mayor que el exponente del binomio.
3. Cuando nos movemos de un término al otro de izquierda a derecha, el exponente de x disminuye en 1, mientras que el de y se incrementa en 1. En todos los términos la adición de los exponentes de x y y es igual a m .
4. Cualquier término en el desarrollo del binomio puede escribirse como:

$$\binom{m}{n} = x^{m-n} y^n \quad n = 0, 1, 2, \dots, m \quad (11.10)$$

De acuerdo a lo anterior, el desarrollo de $(x + y)^m$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} (x + y)^m = & \binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} y + \binom{m}{2} x^{m-2} y^2 + \dots + \binom{m}{k} x^{m-k} y^k + \dots + \\ & + \binom{m}{m-1} x^{m-n+1} y^{m-1} + \binom{m}{m} y^m \end{aligned} \quad (11.11)$$

✱ EJEMPLO 11.2

Desarrolla los siguientes binomios:

a) $(x + 1)^5$

b) $(x - y)^6$

c) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4$

☆ Solución

$$\begin{aligned} \mathbf{a)} \quad (x + 1)^5 &= \binom{5}{0} x^5 1^0 + \binom{5}{1} x^4 1^1 + \binom{5}{2} x^3 1^2 + \binom{5}{3} x^2 1^3 + \binom{5}{4} x^1 1^4 + \binom{5}{5} x^0 1^5 = \\ &= \frac{5!}{0!(5-0)!} x^5 + \frac{5!}{1!(5-1)!} x^4 + \frac{5!}{2!(5-2)!} x^3 + \frac{5!}{3!(5-3)!} x^2 + \frac{5!}{4!(5-4)!} x + \frac{5!}{5!(5-5)!} x^0 = \\ &= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 \end{aligned}$$

Observa que los coeficientes de las potencias de x pueden obtenerse también mediante el triángulo de Pascal.

b) El binomio $(x - y)^6$ puede escribirse como $[x + (-y)]^6$. Desarrollando el binomio:

$$\begin{aligned}
[x + (-y)]^6 &= \binom{6}{0}x^6(-y)^0 + \binom{6}{1}x^5(-y)^1 + \binom{6}{2}x^4(-y)^2 + \binom{6}{3}x^3(-y)^3 + \\
&\quad + \binom{6}{4}x^2(-y)^4 + \binom{6}{5}x^1(-y)^5 + \binom{6}{6}x^0(-y)^6 = \\
&= \frac{6!}{0!(6-0)!}x^6(-y)^0 + \frac{6!}{1!(6-1)!}x^5(-y)^1 + \frac{6!}{2!(6-2)!}x^4(-y)^2 + \frac{6!}{3!(6-3)!}x^3(-y)^3 + \\
&\quad + \frac{6!}{4!(6-4)!}x^2(-y)^4 + \frac{6!}{5!(6-5)!}x^1(-y)^5 + \frac{6!}{6!(6-6)!}x^0(-y)^6 \\
&= x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6
\end{aligned}$$

Observa cómo los signos de términos consecutivos se alternan.

c) Desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned}
(\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 &= \binom{4}{0}(\sqrt{x})^4(-\sqrt{y})^0 + \binom{4}{1}(\sqrt{x})^3(-\sqrt{y})^1 + \binom{4}{2}(\sqrt{x})^2(-\sqrt{y})^2 + \\
&\quad + \binom{4}{3}(\sqrt{x})^1(-\sqrt{y})^3 + \binom{4}{4}(\sqrt{x})^0(-\sqrt{y})^4 = \\
&= 4x^2 - 4x\sqrt{x}\sqrt{y} + 6xy - 4\sqrt{x}y\sqrt{y} + 4y^2 = \\
&= 4x^2 - 4x\sqrt{xy} + 6xy - 4y\sqrt{xy} + 4y^2
\end{aligned}$$

✱ EJEMPLO 11.3

¿Cuál es el término que contiene y^4 en la expansión del binomio $(x + y)^8$?

☆ **Solución**

El término general en el desarrollo del binomio es, según (11.10):

$$\binom{m}{n} x^m y^n$$

Con $m = 8$ y $n = 4$, nos queda:

$$\binom{8}{4} x^4 y^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} x^4 y^4 = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^4 y^4 = 70 x^4 y^4$$

*** Ejercicios**

11.1 Determina el valor numérico de:

a) $8!$ b) $\frac{8!}{3! \cdot 5!}$ c) $\binom{12}{2}$ d) $\binom{60}{59}$ e) $\binom{7}{7}$

11.2 Mediante el triángulo de Pascal prueba que los elementos en la séptima fila son 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

11.3 Usa el teorema del binomio y el triángulo de Pascal para expandir:

a) $(x + 2y)^4$ b) $(2 + x)^5$ c) $(3a - b)^3$ d) $(x + y^2)^5$
e) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$ f) $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^6$ g) $\left(\frac{x}{2} - 2y\right)^6$ h) $(6 - 7)^8$

11.4 Determina: **a)** El tercer término de $(x - y)^5$. **b)** El cuarto término de $(x^3 - y)^6$. **c)** El quinto término de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^7$. **d)** El penúltimo término de $(x - 2)^4$.

11.5 Determina:

- a)** El término que contiene x^4 en $(x + y)^9$.
b) El término que contiene b^2 en $(a - 3b)^4$.
c) El término que contiene a x^3 en $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^7$.
d) El término en x^0 en $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$.

TEORÍA COMBINATORIA

12.1 PRINCIPIO DE CONTEO

A menudo se presenta la necesidad de calcular el número de maneras distintas en que un suceso se presenta o puede ser realizado. Otras veces es importante determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento específico. En ambos casos se apela bien al sentido común, o se establecen métodos que permitan sistematizar tales cálculos. Con frecuencia el sentido común ayuda a entender por qué se eligió un procedimiento dado, mientras que la formalización del cálculo refuerza las vías para encontrar las soluciones apropiadas.

Iniciaremos nuestro estudio de teoría combinatoria enunciando los principios aditivo y multiplicativo de conteo.

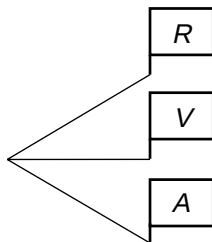
Principio aditivo de conteo: Sean A y B dos sucesos que no pueden ocurrir simultáneamente. Si A ocurre de a maneras distintas y B ocurre de b maneras distintas, el número de maneras en el cual puede ocurrir A o B es $A + B$.

✱ EJEMPLO 12.1

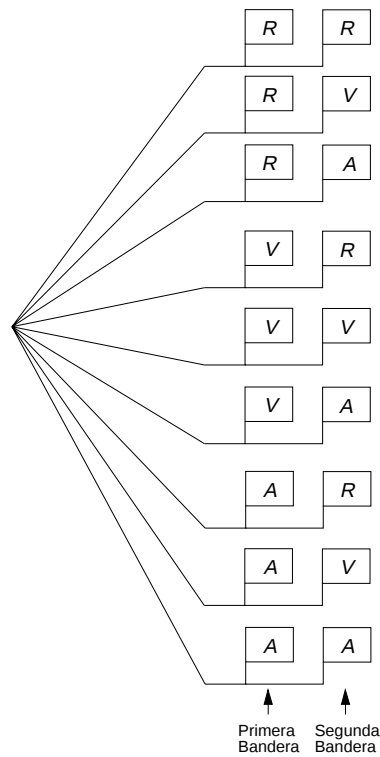
Se tienen 6 banderas de señalización, dos rojas, dos verdes y dos azules. ¿Cuántas señales distintas pueden hacerse con una o dos banderas a la vez?

☆ Solución

Si denotamos las banderas rojas, verdes y azules por R , V y A , respectivamente, vemos que con una bandera a la vez se pueden hacer 3 señales distintas:



Con dos banderas a la vez se pueden hacer las siguientes señales (sacando, por ejemplo, una primera y después la otra):



Entonces, si se utilizan dos banderas, se pueden hacer 9 señales distintas. Luego, con una o dos banderas se podrán realizar $3 + 9 = 12$ señales diferentes. Observa que, como se establece en la definición, se trata de dos sucesos A y B descritos como:

A : Se hacen señales con una sola bandera.

B : Se hacen señales con dos banderas.

y que ambos no pueden ocurrir simultáneamente, ya que si se decide hacer señales con una bandera se descarta la segunda alternativa y viceversa.

Principio multiplicativo de conteo: Si un suceso puede ocurrir en a maneras e, independientemente, un segundo suceso puede ocurrir en b maneras, entonces el número de maneras en que ambos, A y B , pueden ocurrir ab .

A este principio también se le denomina *principio fundamental de conteo*.

✧ EJEMPLO 12.2

En la fig. 12.1 se muestran distintas rutas para ir desde Cumaná hasta Caripe, desde Caripe hasta Maturín y desde Maturín hasta Ciudad Bolívar. ¿De cuántas maneras distintas puede irse desde Cumaná hasta Ciudad Bolívar? La letra R_j ($j = 1, 8$) indica las distintas rutas.

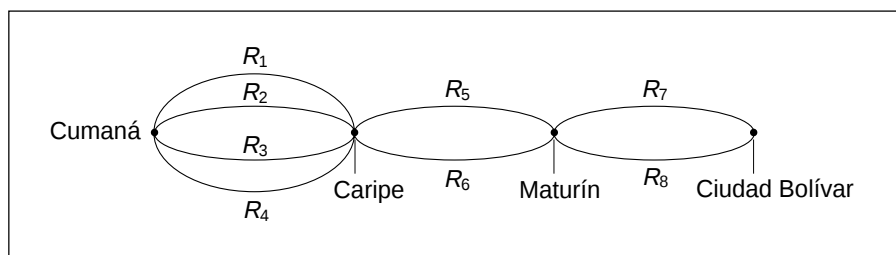


Fig. 12.1 ¿De cuántas maneras distintas se puede ir desde Cumaná hasta Ciudad Bolívar?

☆ Solución

Analicemos el problema a partir del principio fundamental del conteo:

Suceso A: Ir desde Cumaná hasta Caripe. Hay 4 rutas distintas.

Suceso B: Ir desde Caripe hasta Maturín. Hay 2 rutas distintas.

Suceso C: Ir desde Maturín hasta Ciudad Bolívar. Hay 2 rutas distintas.

Los distintos sucesos, A, B y C, son independientes, ya que la selección de una ruta determinada de una ciudad a otra no depende de la anterior.

Luego, para ir desde Cumaná hasta Ciudad Bolívar pueden seleccionarse $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ rutas diferentes. Estas posibles rutas son:

$R_1 R_5 R_7$	$R_2 R_5 R_7$	$R_3 R_5 R_7$	$R_4 R_5 R_7$
$R_1 R_5 R_8$	$R_2 R_5 R_8$	$R_3 R_5 R_8$	$R_4 R_5 R_8$
$R_1 R_6 R_7$	$R_2 R_6 R_7$	$R_3 R_6 R_7$	$R_4 R_6 R_7$
$R_1 R_6 R_8$	$R_2 R_6 R_8$	$R_3 R_6 R_8$	$R_4 R_6 R_8$

✧ EJEMPLO 12.3

Un agente gubernamental tiene que inspeccionar los ferrys que hacen la travesía entre la isla de Margarita y tierra firme. Para ello se embarca en Punta de Piedras, en dicha isla, y debe abordar cualquiera de las 9 unidades disponibles y luego regresarse en un ferry distinto. ¿De cuántas

maneras puede el inspector ir desde Margarita a tierra firme y luego regresar?

☆ Solución

Si llamamos $U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6, U_7, U_8$ y U_9 a las unidades, el inspector tiene 9 maneras de venir desde Margarita a tierra firme seleccionando uno de los nueve ferrys. Una vez en tierra firme, como no puede devolverse para Margarita en el mismo ferry en que se vino, tiene 8 posibilidades distintas. Entonces hay $9 \times 8 = 72$ maneras distintas de que el agente pueda cumplir su función. Estas distintas posibilidades son:

U_1U_2	U_1U_3	U_1U_4	U_1U_5	U_1U_6	U_1U_7	U_1U_8	U_1U_9
U_2U_1	U_2U_3	U_2U_4	U_2U_5	U_2U_6	U_2U_7	U_2U_8	U_2U_9
U_3U_1	U_3U_2	U_3U_4	U_3U_5	U_3U_6	U_3U_7	U_3U_8	U_3U_9
U_4U_1	U_4U_2	U_4U_3	U_4U_5	U_4U_6	U_4U_7	U_4U_8	U_4U_9
U_5U_1	U_5U_2	U_5U_3	U_5U_4	U_5U_6	U_5U_7	U_5U_8	U_5U_9
U_6U_1	U_6U_2	U_6U_3	U_6U_4	U_6U_5	U_6U_7	U_6U_8	U_6U_9
U_7U_1	U_7U_2	U_7U_3	U_7U_4	U_7U_5	U_7U_6	U_7U_8	U_7U_9
U_8U_1	U_8U_2	U_8U_3	U_8U_4	U_8U_5	U_8U_6	U_8U_7	U_8U_9
U_9U_1	U_9U_2	U_9U_3	U_9U_4	U_9U_5	U_9U_6	U_9U_7	U_9U_8

✱ EJEMPLO 12.4

Tres profesores de Matemática del liceo Andrés Bello de Caracas van a ser asignados a cuatro secciones distintas. ¿De cuántas maneras distintas pueden asignarse los profesores si cada uno puede tomar sólo una sección?

☆ Solución

Designemos a los tres profesores por P_1, P_2 y P_3 y a las distintas secciones por S_1, S_2, S_3 y S_4 . El primer profesor seleccionado puede ser asignado a cualquiera de los 4 cursos. Quedan así 3 cursos que puede ser asignado al segundo profesor. Al tercer profesor le quedan dos opciones, una vez asignado el primer y segundo profesor. Por tanto, los tres profesores pueden ser asignados de $4 \times 3 \times 2 = 24$ maneras distintas a los cuatro cursos. Si designamos P_iS_j ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4$) a las distintas combinaciones profesor-curso, las posibilidades se muestran a continuación:

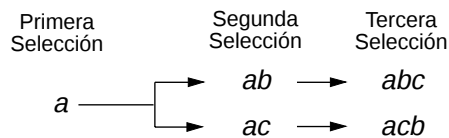
<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td>●</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₂</th><td></td><td>●</td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₃</th><td></td><td></td><td>×</td><td>×</td></tr></table> $P_1 S_1 P_2 S_2 P_3 S_3$ $P_1 S_1 P_2 S_2 P_3 S_4$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁	●				P ₂		●			P ₃			×	×	<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td>●</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₂</th><td></td><td></td><td>●</td><td></td></tr><tr><th>P₃</th><td></td><td>×</td><td></td><td>×</td></tr></table> $P_1 S_1 P_2 S_3 P_3 S_2$ $P_1 S_1 P_2 S_3 P_3 S_4$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁	●				P ₂			●		P ₃		×		×	<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td>●</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₂</th><td></td><td></td><td></td><td>●</td></tr><tr><th>P₃</th><td></td><td>×</td><td>×</td><td></td></tr></table> $P_1 S_2 P_2 S_4 P_3 S_2$ $P_1 S_2 P_2 S_4 P_3 S_3$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁	●				P ₂				●	P ₃		×	×		<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td></td><td>●</td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₂</th><td>●</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₃</th><td></td><td></td><td>×</td><td>×</td></tr></table> $P_1 S_2 P_2 S_1 P_3 S_3$ $P_1 S_2 P_2 S_1 P_3 S_4$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁		●			P ₂	●				P ₃			×	×
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁	●																																																																																		
P ₂		●																																																																																	
P ₃			×	×																																																																															
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁	●																																																																																		
P ₂			●																																																																																
P ₃		×		×																																																																															
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁	●																																																																																		
P ₂				●																																																																															
P ₃		×	×																																																																																
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁		●																																																																																	
P ₂	●																																																																																		
P ₃			×	×																																																																															
<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td></td><td>●</td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₂</th><td></td><td></td><td>●</td><td></td></tr><tr><th>P₃</th><td>×</td><td></td><td></td><td>×</td></tr></table> $P_1 S_2 P_2 S_3 P_3 S_1$ $P_1 S_2 P_2 S_3 P_3 S_4$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁		●			P ₂			●		P ₃	×			×	<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td></td><td>●</td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₂</th><td></td><td></td><td></td><td>●</td></tr><tr><th>P₃</th><td>×</td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table> $P_1 S_2 P_2 S_4 P_3 S_1$ $P_1 S_2 P_2 S_4 P_3 S_3$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁		●			P ₂				●	P ₃	×		×		<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td></td><td></td><td>●</td><td></td></tr><tr><th>P₂</th><td>●</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₃</th><td></td><td>×</td><td></td><td>×</td></tr></table> $P_1 S_3 P_2 S_1 P_3 S_2$ $P_1 S_2 P_2 S_1 P_3 S_4$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁			●		P ₂	●				P ₃		×		×	<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td></td><td></td><td>●</td><td></td></tr><tr><th>P₂</th><td></td><td>●</td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₃</th><td>×</td><td></td><td></td><td>×</td></tr></table> $P_1 S_3 P_2 S_2 P_3 S_1$ $P_1 S_3 P_2 S_2 P_3 S_4$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁			●		P ₂		●			P ₃	×			×
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁		●																																																																																	
P ₂			●																																																																																
P ₃	×			×																																																																															
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁		●																																																																																	
P ₂				●																																																																															
P ₃	×		×																																																																																
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁			●																																																																																
P ₂	●																																																																																		
P ₃		×		×																																																																															
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁			●																																																																																
P ₂		●																																																																																	
P ₃	×			×																																																																															
<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td></td><td></td><td>●</td><td></td></tr><tr><th>P₂</th><td></td><td></td><td></td><td>●</td></tr><tr><th>P₃</th><td>×</td><td>×</td><td></td><td></td></tr></table> $P_1 S_3 P_2 S_4 P_3 S_1$ $P_1 S_3 P_2 S_4 P_3 S_2$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁			●		P ₂				●	P ₃	×	×			<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td></td><td></td><td></td><td>●</td></tr><tr><th>P₂</th><td>●</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₃</th><td></td><td>×</td><td>×</td><td></td></tr></table> $P_1 S_4 P_2 S_1 P_3 S_2$ $P_1 S_4 P_2 S_1 P_3 S_3$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁				●	P ₂	●				P ₃		×	×		<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td></td><td></td><td></td><td>●</td></tr><tr><th>P₂</th><td></td><td>●</td><td></td><td></td></tr><tr><th>P₃</th><td>×</td><td></td><td>×</td><td></td></tr></table> $P_1 S_4 P_2 S_2 P_3 S_1$ $P_1 S_4 P_2 S_2 P_3 S_3$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁				●	P ₂		●			P ₃	×		×		<table><tr><th></th><th>S₁</th><th>S₂</th><th>S₃</th><th>S₄</th></tr><tr><th>P₁</th><td></td><td></td><td></td><td>●</td></tr><tr><th>P₂</th><td></td><td></td><td>●</td><td></td></tr><tr><th>P₃</th><td>×</td><td>×</td><td></td><td></td></tr></table> $P_1 S_4 P_2 S_3 P_3 S_1$ $P_1 S_4 P_2 S_3 P_3 S_2$		S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	P ₁				●	P ₂			●		P ₃	×	×		
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁			●																																																																																
P ₂				●																																																																															
P ₃	×	×																																																																																	
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁				●																																																																															
P ₂	●																																																																																		
P ₃		×	×																																																																																
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁				●																																																																															
P ₂		●																																																																																	
P ₃	×		×																																																																																
	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄																																																																															
P ₁				●																																																																															
P ₂			●																																																																																
P ₃	×	×																																																																																	

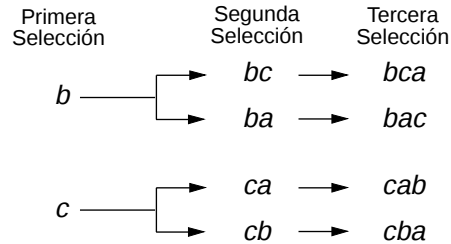
12.2 PERMUTACIONES

Estudiaremos a continuación una aplicación directa del principio fundamental del conteo. Supongamos que tenemos los objetos distintos, a , b y c , y que queremos saber de cuántas maneras distintas se pueden agrupar tomados tres a la vez. El primer elemento seleccionado puede ser a , b o c y, por tanto, tenemos 3 maneras distintas de seleccionar el primer elemento. Una vez seleccionado el primer elemento, tenemos dos elementos para escoger, es decir, dos maneras distintas de seleccionar el segundo elemento. Finalmente, una vez seleccionados el primero y segundo elemento, sólo queda uno y, por tanto, una sola manera de seleccionar el tercer elemento. En definitiva, hay:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ maneras distintas de agrupar los 3 elementos.}$$

Veamos cuáles son esas agrupaciones distintas:





Observa que las agrupaciones mostradas no incluyen elementos repetidos y descartan, por lo tanto, selecciones de la forma aab , acc , etc. En este libro consideraremos sólo agrupaciones sin repetición. Si el número de elementos es 4, las agrupaciones que puedan formarse son:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

En general, si hay n elementos, el número de agrupaciones distintas, designado por P_n y denominado *permutaciones de n elementos*, es:

$$P_n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (12.1)$$

✱ EJEMPLO 12.5

a) En una elección hay 8 candidatos. ¿Cuántos resultados distintos pueden tener lugar una vez efectuada la votación?

b) ¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse 5 libros en una biblioteca? Escribe 4 de esas agrupaciones.

☆ Solución

a) Es posible obtener:

$$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40.320 \text{ resultados}$$

b) Los libros pueden colocarse de:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ maneras distintas}$$

Si llamamos L_1, L_2, L_3, L_4 y L_5 a los libros, 4 agrupaciones distintas son:

$$L_1 L_2 L_3 L_4 L_5, \quad L_3 L_4 L_5 L_1 L_2, \quad L_4 L_1 L_3 L_2 L_5, \quad L_2 L_5 L_3 L_1 L_4$$

Observa que en las permutaciones se cumple lo siguiente:

- a. En las agrupaciones intervienen todos los elementos.
- b. Dos agrupaciones son distintas si el orden en que aparecen los elementos difieren.

12.3 VARIACIONES

Consideremos cuatro elementos, A , B , C y D , y veamos cuántas agrupaciones pueden formarse si se toman dichos elementos uno, dos, tres y cuatro a la vez. Al número de elementos, en este caso 4, lo denotamos por la letra m ($m = 4$).

- a. Si se toma un elemento a la vez, el número de agrupaciones que se puede formar es 4:

$A \qquad B \qquad C \qquad D$

Se dice que se han formado las variaciones de 4 elementos tomados de uno en uno, lo cual se representa como $V_{4,1}$. Observa que:

$$V_{4,1} = 4$$

- b. Si se toman dos elementos a la vez, se tienen las siguientes agrupaciones:

AB	BA	CA	DA
AC	BC	CB	DB
AD	BD	CD	DC

Se han formado así las variaciones de 4 elementos tomados de dos en dos, Entonces:

$$V_{4,2} = 12$$

Observa que:

$$V_{4,2} = V_{4,1} \cdot (4 - 1)$$

$$V_{4,2} = 4 \cdot (4 - 1) = 4 \cdot 3 = 12$$

- c. Si se toman 3 elementos de los 4, obtenemos las siguientes agrupaciones:

<i>ABC</i>	<i>BAC</i>	<i>CAB</i>	<i>DAB</i>
<i>ABD</i>	<i>BAD</i>	<i>CAD</i>	<i>DAC</i>
<i>ACB</i>	<i>BCA</i>	<i>CBA</i>	<i>DBA</i>
<i>ACD</i>	<i>BCD</i>	<i>CBD</i>	<i>DBC</i>
<i>ADB</i>	<i>BDA</i>	<i>CDA</i>	<i>DCA</i>
<i>ADC</i>	<i>BDC</i>	<i>CDB</i>	<i>DCB</i>

El número de agrupaciones es:

$$V_{4,3} = V_{4,2} \cdot (4 - 2)$$

$$V_{4,3} = 4 \cdot (4 - 1) \cdot (4 - 2) = 24$$

d. Si se toman 4 elementos de los 4, obtenemos las siguientes agrupaciones:

<i>ABCD</i>	<i>BACD</i>	<i>CABD</i>	<i>DABC</i>
<i>ABDC</i>	<i>BADC</i>	<i>CADB</i>	<i>DACB</i>
<i>ACBD</i>	<i>BCAD</i>	<i>CBAD</i>	<i>DBAC</i>
<i>ACDB</i>	<i>BCDA</i>	<i>CBDA</i>	<i>DBC A</i>
<i>ADBC</i>	<i>BDAC</i>	<i>CDAB</i>	<i>DCAB</i>
<i>ADCB</i>	<i>BDCA</i>	<i>CDBA</i>	<i>DCBA</i>

El total de agrupaciones resulta en este caso igual a:

$$V_{4,4} = 4 \cdot (4 - 1) \cdot (4 - 2) \cdot (4 - 3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

El ejemplo estudiado indica que:

$$V_{4,1} = 4$$

$$V_{4,2} = 4 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad V_{4,2} = V_{4,1} \cdot 3$$

$$V_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \quad \rightarrow \quad V_{4,3} = V_{4,2} \cdot 2$$

$$V_{4,4} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad \rightarrow \quad V_{4,4} = V_{4,3} \cdot 1$$

En general, para m elementos podemos escribir:

$$V_{m,1} = m$$

$$V_{m,2} = m(m - 1) \quad \rightarrow \quad V_{m,2} = V_{m,1} \cdot (m - 1)$$

$$V_{m,3} = m(m - 1)(m - 2) \quad \rightarrow \quad V_{m,3} = V_{m,2} \cdot (m - 2)$$

⋮

$$V_{m,n} = m(m - 1)(m - 2) \dots (m - n + 1) \quad \rightarrow \quad V_{m,n} = V_{m,(n-1)} \cdot (m - n + 1)$$

De acuerdo a lo anterior, la relación:

$$V_{m,n} = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) \quad (12.2)$$

permite determinar las variaciones de m elementos tomados de n en n . Si en la relación (12.2) multiplicamos y dividimos el numerador y denominador por $(m-n)!$, obtenemos:

$$V_{m,n} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(m-n)!}{(m-n)!} \quad (12.3)$$

Ahora bien, de acuerdo a (11.4), $(m-n)!$ puede escribirse como:

$$(m-n)! = (m-n)(m-n-1)(m-n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (12.4)$$

Sustituyendo en (12.3)

$$V_{m,n} = \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)(m-n)(m-n-1)(m-n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(m-n)!} \quad (12.5)$$

El numerador de (12.5) es $m!$ y, por tanto,

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!} \quad (12.6)$$

Es importante notar lo siguiente, que en el caso de variaciones de m elementos tomados de n en n :

- a.** De los m elementos, sólo n intervienen en las agrupaciones.
- b.** Las agrupaciones de n elementos son distintas si difieren en el orden de colocación.

✱ EJEMPLO 12.6

Determina:

a) $V_{7,3}$

b) $V_{x+1,1}$

c) $\frac{V_{m,n}}{V_{m,n-2}}$

☆ Solución

$$\text{a) } V_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4!} = 210$$

$$\text{b) } V_{x+1,1} = \frac{(x+1)!}{(x+1-1)!} = \frac{x!(x+1)}{x!} = x+1$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{V_{m,n}}{V_{m,n-2}} &= \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{\frac{m!}{(m-n+2)!}} = \frac{(m-n+2)!}{(m-n)!} = \frac{(m-n)!(m-n+1)(m-n+2)}{(m-n)!} = \\ &= (m-n+1)(m-n+2) \end{aligned}$$

✱ EJEMPLO 12.7

¿De cuántas maneras se pueden agrupar 5 bolas de distintos colores?

☆ Solución

Si las bolas tienen colores distintos, digamos amarillo (A), rojo (R), negro (N), verde (V) y marrón (M), se trata de permutarlas para obtener agrupaciones diferentes. Así serían distintas las agrupaciones:

$$ARNVM, \quad MVARN, \quad NRAMV, \quad RAVNM$$

El número total de maneras distintas es:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

✱ EJEMPLO 12.8

10 personas se van a sentar en 4 sillas. ¿De cuántas maneras pueden hacerlo?

☆ Solución

De las 10 personas se van a seleccionar 4 y estas 4 personas pueden cambiarse entre sí de asientos. Se trata entonces de ${}_{10,4}$. Observa que agrupaciones como $P_1P_2P_3P_4$ y $P_4P_2P_1P_3$ son distintas. Luego, el número de agrupaciones son:

$$V_{10,4} = \frac{10!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6!} = 5.040$$

✻ EJEMPLO 12.9

¿Cuántos números de 4 dígitos pueden formarse con los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 si ninguno de ellos puede repetirse?

☆ Solución

Los números no pueden comenzar por cero, ya que se formarían números tales como 0358, que correspondería al número de tres cifras 358. Por tanto, el primer dígito puede ser seleccionado sólo de 9 maneras distintas (se excluye al cero). Una vez seleccionado el primer dígito, los otros tres pueden ser seleccionados en $V_{9,3}$ maneras diferentes. Por tanto, se pueden formar:

$$9 \cdot V_{9,3} = 9 \cdot \frac{9!}{6!} = 9 \cdot \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 = 4.536 \text{ números de 4 cifras.}$$

✻ EJEMPLO 12.10

¿Cuántos números de 4 dígitos pueden formarse con los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 si el último debe ser cero y ninguno puede repetirse?

☆ Solución

En este caso, el cero se fija al final del número y quedan tres posiciones que llenar y 9 números para escoger. Luego se pueden formar:

$$V_{9,3} = \frac{9!}{6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{6!} = 504 \text{ números de 4 cifras.}$$

✻ Ejercicios

12.1 ¿De cuántas maneras pueden arreglarse 6 libros distintos de Matemática en un tramo de una biblioteca donde caben ajustadamente?

12.2 Se tienen 4 libros de Matemática y 3 de Física. Los libros son todos diferentes. **a)** ¿De cuántas formas pueden arreglarse verticalmente, uno al lado del otro, todos los libros? **b)** Si los libros en cada materia deben permanecer juntos, ¿cuántos arreglos distintos pueden hacerse?

12.3 ¿Para qué valor de n se cumple que $V_{n+1,3} = V_{n,4}$?

12.4 ¿De cuántas formas pueden sentarse 5 personas en un sofá si hay sólo 3 asientos disponibles?

12.5 Si hay 12 jugadores en un equipo de beisbol, ¿de cuántas maneras se puede organizar el orden de bateo si el equipo consta de 9 jugadores ?

12.6 Seis candidatos para el Concejo Municipal del municipio Sucre deben hablar en un debate público. **a)** ¿En cuántos órdenes distintos pueden ser anunciados? **b)** ¿En cuántos órdenes distintos pueden hablar si el candidato Hernán debe hablar primero? **c)** ¿En cuántos órdenes distintos pueden hablar si Marcos debe hablar inmediatamente después de Hernán?

12.7 ¿De cuántas maneras pueden sentarse 7 personas en un banco si Ernesto, Anamary y Carlos deben sentarse siempre juntos?

12.8 ¿Cuántos enteros menores que 100 pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 si no pueden repetirse?

12.9 ¿Cuántos enteros pares menores que 100 pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4 y 5 si no pueden repetirse?

12.4 COMBINACIONES

Consideremos cuatro elementos, A , B , C y D , y veamos nuevamente las distintas agrupaciones que se pueden formar si se forman grupos de 1, 2, 3 y 4 elementos:

					Corresponde a:
Grupos de 1:	A	B	C	D	$V_{4,1} = 4$
Grupos de 2:	AB	AC	AD	BC	$V_{4,2} = 12$
	BA	CA	DA	BD	
	CB	CD	DB	DC	
Grupos de 3:	ABC	ABD	ACD	BCD	$V_{4,3} = 24$
	ACB	ADB	ADC	BDC	
	BAC	BAD	CAD	CBD	
	BCA	BDA	CDA	CDB	
	CAB	DAB	DAC	DBC	
	CBA	DBA	DCA	DCB	

	Corresponde a:
Grupos de 4: $ABCD$ $BACD$ $CABD$ $DABC$ $ABDC$ $BADC$ $CADB$ $DACB$ $ABCD$ $BACD$ $CBAD$ $DBAC$ $ACBD$ $BCAD$ $CBDA$ $DBCA$ $ACDB$ $BCAC$ $CDAB$ $DCAB$ $ADCB$ $BDCA$ $CDBA$ $DCBA$	$V_{4,4} = 24$

En las agrupaciones estudiadas, permutaciones y variaciones, los grupos que contenían los mismos elementos eran distintos cuando el orden no era el mismo. Cuando hablamos de *combinaciones*, las agrupaciones que tengan el mismo número de elementos son iguales, independientemente del orden que ocupan dichos elementos. A las combinaciones de m elementos tomados de n en n se les denota como $C_{m,n}$. Así, en el caso anterior, se obtienen las siguientes combinaciones distintas:

	Corresponde a:
Grupos de 1: A B C D	$V_{4,1} = 4$
Grupos de 2: AB AC AD BC BD CD	$V_{4,2} = 6$
Grupos de 3: ABC ABD ACD BCD	$V_{4,3} = 4$
Grupos de 4: $ABCD$	$V_{4,4} = 1$

Si hacemos una comparación para ambos casos, variaciones y combinaciones, obtenemos para las agrupaciones de los elementos A , B , C y D la siguiente tabla:

Número de elementos (n)	Variaciones ($V_{m,n}$)	Combinaciones ($C_{m,n}$)
1	4	4
2	12	6
3	24	4
4	24	1

Si analizamos la tabla anterior, nos damos cuenta que el número de variaciones se obtiene multiplicando el número de combinaciones por $n!$,

por lo que podemos obtener la tabla:

n	$n!$	$C_{m,n}$	$V_{m,n}$
1	1	4	4
2	2	6	12
3	6	4	24
4	24	1	24

En general, el número de variaciones de m elementos, tomando de n en n , está dado por:

$$V_{m,n} = n! \cdot C_{m,n} \quad (12.7)$$

Como $P_n = n!$:

$$V_{m,n} = P_n \cdot C_{m,n} \quad (12.8)$$

Despejando $C_{m,n}$:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} \quad (12.9)$$

Finalmente, se obtiene:

$$C_{m,n} = \frac{m!}{n!(m-n)!} \quad (12.10)$$

✱ EJEMPLO 12.11

Se tienen 12 jugadores de beisbol y se van a seleccionar 9 para formar un equipo. ¿Cuántos equipos distintos pueden formarse?

☆ Solución

Este es un problema de combinaciones, ya que un equipo es distinto a otro se difiere al menos en un jugador. Por tanto, el número de equipos es:

$$C_{12,9} = \frac{12!}{9!(12-9)!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{9! \cdot 2 \cdot 3} = 220$$

✱ EJEMPLO 12.12

Se tienen 5 puntos en un plano ubicados de forma tal que no hay tres de

ellos en línea recta. ¿Cuántas líneas pueden dibujarse entre dichos puntos? Dibuja las distintas líneas.

☆ Solución

Se trata, en este caso, de seleccionar 2 puntos de los 5 posibles. Cada dos puntos dan origen a una línea distinta. El número de líneas es:

$$C_{12,9} = \frac{12!}{9!(12-9)!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{9! \cdot 2 \cdot 3} = 220$$

En la fig. 12.1 se muestran las diferentes alternativas.

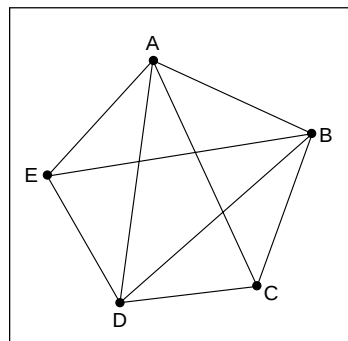


Fig. 12.1 Entre 5 puntos se pueden dibujar $C_{5,2} = 10$ líneas distintas.

* Ejercicios

12.10 Determina el valor de:

a) $C_{9,5}$

b) $C_{15,8}$

c) $C_{100,98}$

d) $C_{100,2}$

12.11 Demuestra que:

a) $C_{m,n} = C_{m,n-n}$

b) $C_{12,5} + C_{12,4} = C_{13,5}$

12.12 ¿Cuántos triángulos pueden formarse con 12 puntos no alineados?

12.13 ¿Cuántas diagonales pueden dibujarse en un polígono regular de 8 lados?

12.14 Una caja contiene 9 bolas de distintos colores. ¿Cuántos conjuntos de 3 bolas pueden ser seleccionadas?

12.15 Se va a formar una comisión de 5 miembros a partir de 12 diputados del partido A y 7 diputados del partido B. ¿De cuántas maneras puede seleccionarse la comisión si tiene que haber mayoría del partido A?

12.16 Se va a integrar un comité a partir de 5 profesores de Química y 7 de Matemática. El comité estará formado por 2 profesores de Química y 3 de Matemática. ¿De cuántas maneras puede formarse el comité si: a) Cualquier profesor de Química y Matemática puede ser incluido? b) Un profesor específico de Matemática debe ser incluido? c) Hay dos profesores de Química que no pueden incluirse en el comité?

12.17 Con 7 consonantes y 5 vocales, ¿cuántas palabras de 4 consonantes y 3 vocales diferentes pueden formarse, si ninguna letra puede repetirse?

ESTADÍSTICA

En cursos anteriores hemos estudiado los conceptos básicos de estadística descriptiva. En este capítulo haremos un breve repaso de esos conocimientos y estudiaremos las medidas de dispersión aplicados a datos organizados.

13.1 ORGANIZACIÓN DE DATOS. HISTOGRAMAS.

Como se estudió en 7º y 8º grados, un histograma es un gráfico de barras en el cual no se deja espacio entre las mismas. En la fig. 13.1 se muestra un gráfico de barras y un histograma.

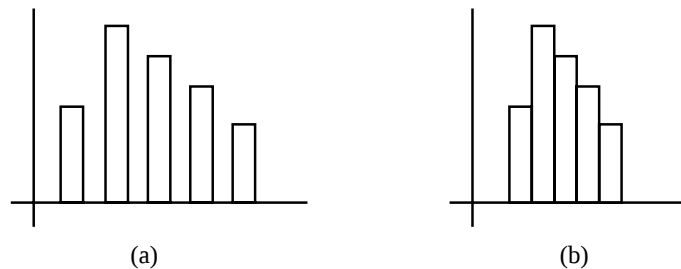


Fig. 13.1 (a) Gráfico de barras. (b) Histograma.

En los histogramas la frecuencia de las medidas se coloca en el eje vertical, el cual comienza normalmente en cero. Las alturas de las barras representan la frecuencia de los distintos datos, es decir, el número de observaciones dentro de cada clase. El eje horizontal puede comenzar en cualquier número tomado convenientemente, de acuerdo con los datos que se van a representar.

Los límites de los intervalos de clase se marcan en los extremos de las barras. Muchas veces, para no complicar el dibujo del histograma, se utilizan los puntos medios de cada clase en lugar de los límites superior e inferior.

Un *polígono de frecuencias* es un gráfico lineal, obtenido al unir los puntos medios de los lados superiores de las barras de los histogramas.

A fin de facilitar el dibujo de los histogramas y de los polígonos de frecuencias, se pueden utilizar las siguientes reglas:

1. Organiza los datos en orden creciente y determina el número mayor y menor entre ellos. Construye una tabla de distribución de frecuencias.

2. Determina el *rango* de los datos. El *rango* es la diferencia entre el número mayor y el número menor.
3. Divide el rango entre un número apropiado de intervalos de la misma longitud. Los límites superior e inferior no tienen por qué coincidir con las observaciones (datos).
4. Construye una tabla de frecuencias con los datos agrupados en intervalos, señalando el punto medio de cada uno de ellos.
5. Dibuja el histograma y/o el polígono de frecuencias.

✱ EJEMPLO 13.1

Las alturas en centímetros de 70 estudiantes de la Universidad Simón Bolívar se muestran en la tabla de la fig. 13.2. Dibuja un histograma correspondiente a esos datos.

168	180	163	167	169	170	167	171	172	165
167	170	168	171	168	164	172	173	174	174
164	174	169	173	175	174	176	165	176	170
168	170	160	166	177	169	177	168	170	177
169	174	176	161	175	168	178	162	179	160
171	168	171	169	169	173	176	169	165	176
163	170	165	167	174	168	171	164	175	169

Fig. 13.2 Altura en cm de 70 estudiantes de la Universidad Simón Bolívar. Ejemplo 13.1.

☆ Solución

En la fig. 13.3 se muestran los datos en orden creciente de altura y la frecuencia de cada uno de ellos:

Altura	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
f	2	1	1	2	3	4	1	4	8	8	6

Altura	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
f	5	2	3	6	3	5	3	1	1	1

Fig. 13.3 Organización de los datos en orden creciente para el ejemplo 13.1.

El rango de los datos es:

$$\text{Rango} = 180 - 160 = 20$$

Dividiremos el rango por 4 para obtener 5 intervalos:

$$\text{Número de intervalos} = \frac{20}{4} = 5$$

En la fig. 13.4 se muestra la tabla de distribución de frecuencias con 5 intervalos de clase y en la fig. 13.5 se presenta el histograma correspondiente.

Altura	Punto Medio	f
160 - 164	162	9
165 - 169	167	25
170 - 174	172	22
175 - 179	177	13
180 - 184	182	1

Fig. 13.4 Distribución de frecuencias para el ejemplo 13.1.

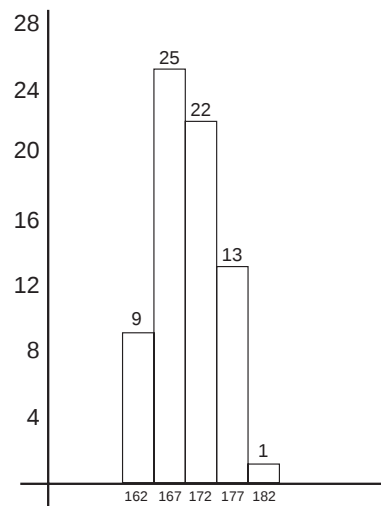


Fig. 13.5 Histograma para el ejemplo 13.1.

Como podrás notar, en la fig. 13.5 se ha colocado el número de estudiantes sobre cada barra vertical. Esto se hace comúnmente cuando se construyen histogramas y es un recurso que ayuda a interpretar más rápidamente los mismos.

13.2 MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

El concepto de promedio es familiar a la mayoría de nosotros. Usualmente se habla del peso promedio, de la altura promedio o del promedio de notas. Hay varios tipos de promedio, pero los más usados son la *media aritmética*, la *mediana* y la *moda*, que son *medidas de tendencia central*.

La *media aritmética* se determina dividiendo la suma de todos los datos por el número de ellos. La media aritmética es el promedio que se usa más comúnmente y su selección es apropiada cuando los datos están distribuidos más o menos uniformemente. La popularidad de la media aritmética

descansa en el hecho que los datos se agrupan en forma regular alrededor de la misma. Esta medida de tendencia central tiene el problema que los datos extremos afectan sensiblemente su valor.

La media aritmética de datos no organizados se calcula mediante la relación:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} \quad (13.1)$$

donde: $\sum x_i$ = suma de los datos. n = número de datos.

Cuando los datos están organizados en intervalos de clase, se usa la relación:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i}{n} \quad (13.2)$$

donde: $f_1, f_2, \dots, f_n$ = frecuencia de los intervalos de clase.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ = puntos medios de los intervalos de clase.

n = número total de datos.

En un conjunto de datos, la *moda* es el valor que se presenta con mayor frecuencia. Un conjunto de datos puede o no tener moda. En caso de que exista, ésta puede no ser única. Cuando en un conjunto de datos hay una sola moda, el conjunto es *unimodal*, si hay dos modas, *bimodal* y así sucesivamente.

La moda se utiliza cuando la cantidad de datos es muy grande. Por ejemplo, para un fabricante de pantalones tal vez sea más importante saber que la mayoría de las mujeres en una región usan talla 32 que saber que el promedio de las tallas es 33,2.

Cuando los datos están organizados en intervalos de clase, no se habla de moda, sino de *clase modal*. La clase modal en una distribución organizada en intervalos de clase es aquella que aparece con mayor frecuencia.

Cuando se quiere evitar la influencia de los datos extremos en el conjunto de datos, se utiliza la *mediana*. Cuando se utiliza esta medida de tendencia central, la mitad de los datos quedan por debajo de la mediana y la otra mitad queda por encima de la mediana.

La mediana de un conjunto arreglados en orden creciente o decreciente es el valor medio si el número de datos es impar y es igual a la media aritmética de los dos valores del medio si el número de datos es par. A la mediana se le representa por el símbolo $\tilde{x}$.

✱ EJEMPLO 13.2

Los salarios mensuales en bolívares en una oficina de una empresa petrolera son los siguientes:

34.000 32.000 44.000 28.000 28.000 30.000 200.000 25.000

Determina: **a)** La media aritmética. **b)** La moda. **c)** La mediana.

☆ Solución

Ordenemos los datos en orden creciente:

25.000 28.000 28.000 30.000 32.000 34.000 44.000
200.000

a) La media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{25.000 + 28.000 + 28.000 + 30.000 + 32.000 + 34.000 + 44.000 + 200.000}{8}$$

$$\bar{x} = \frac{421.000}{8} = 52.625$$

Observa que la media aritmética nos dice que en promedio los trabajadores de esa oficina de la empresa ganan Bs. 52.625. Como puedes notar, todos los trabajadores, con excepción del que gana 200.000 bolívares, tienen sueldos por debajo del promedio. Esto muestra cómo la media es afectada apreciablemente por el valor de Bs. 200.000, que es lo que gana el trabajador mejor pagado de la oficina.

b) El valor que ocurre con mayor frecuencia es 28.000, que es la moda.

c) Los dos valores del medio son 28.000 y por tanto la mediana es:

$$\tilde{x} = \frac{28.000 + 28.000}{2} = 28.000$$

La mediana, en este caso, es más representativa de la cantidad que gana la mayoría de los trabajadores.

✱ EJEMPLO 13.3

La altura en cm de un grupo de estudiantes está dada en la fig. 13.6. **a)** A partir de los datos, determina la altura promedio de los estudiantes. **b)** Organiza los datos en intervalos de clase de longitud igual a 2 y determina nuevamente la

altura promedio. **c)** Dibuja el histograma correspondiente a la distribución anterior. **d)** ¿Cuál es la clase modal? **e)**Cuál es la mediana?

160	164	165	161	166	162	164	163	169	168
167	161	167	158	165	168	164	168	171	166
164	167	166	168	172	161	162	169	165	170
167	168	170	173	168	171	167	172	175	169

Fig. 13.6 Datos para el ejemplo 13.3.

☆ **Solución**

a) La media aritmética es: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{40} x_i}{40} = \frac{6.661}{40} = 166,53$

b) En la fig. 13.7 se muestran los datos organizados en intervalos de clase de longitud igual a 2.

Altura	f_i	x_i	$f_i x_i$
158 - 160	2	159	318
161 - 163	6	162	972
164 - 166	10	165	1.650
167 - 169	14	168	2.352
170 - 172	6	171	1.026
173 - 175	2	174	348
$\Sigma f_i = 40 \quad \Sigma f_i x_i = 6.666$			

Fig. 13.7 Datos organizados en intervalos de clase. Ejemplo 13.3.

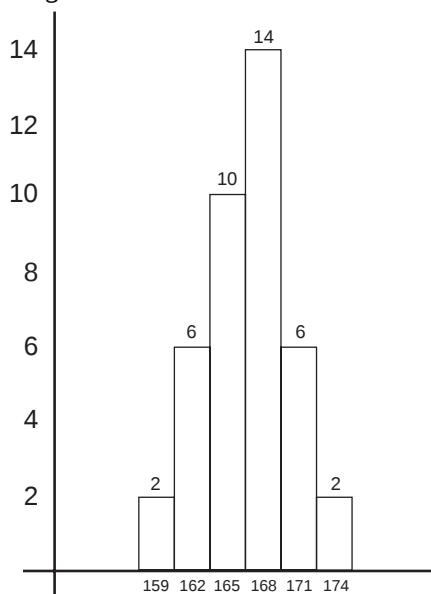


Fig. 13.8 Histograma para el ejemplo 13.3.

De acuerdo a la relación (13.2), la media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{40} f_i x_i}{40} = \frac{6.666}{40} = 166,65$$

Observa que los resultados son muy cercanos entre sí.

c) El histograma se muestra en la fig. 13.8.

d) La clase modal es (167 - 169) que es la que tiene mayor frecuencia.

e) Si organizamos los datos en orden creciente:

158	160	161	161	161	162	162	163	164	164
164	164	165	165	165	166	166	166	167	167
167	167	167	168	168	168	168	168	168	169
169	169	170	170	171	171	172	172	173	173

Observamos que la mediana es:

$$\tilde{x} = \frac{167 + 167}{2} = 167$$

La mediana es más representativa de la altura de la mayoría de los estudiantes.

13.3 MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Además de las unidades de tendencia central, es muchas veces necesario tener una idea que indique cómo los datos están repartidos en la distribución. Tales unidades se llaman *medidas de dispersión*.

Consideremos, por ejemplo, las dos distribuciones de la fig. 13.9.

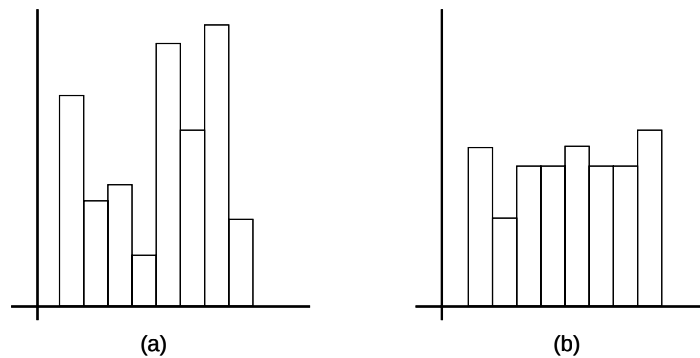


Fig. 13.9 El histograma (a) presenta mayor dispersión que el (b).

En la fig. 13.9(a) los datos presentan mayor variación con respecto a los de la fig. 13.9 (b). Están, por lo tanto, más dispersos.

La medida más simple de dispersión es *el rango*, que es la diferencia de los valores mayor y menor de los datos. El rango no es una buena medida de dispersión porque depende sólo de dos valores y no nos dice nada sobre los otros.

La *desviación media* o *desviación promedio* de un conjunto de números es otra medida de dispersión y se define como:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|}{N} \quad (13.3)$$

donde $\bar{x}$ es la media aritmética de los números, $|x_i - \bar{x}|$ es el valor absoluto de la desviación de x_i con respecto a $\bar{x}$ y N es el número de datos.

Para datos agrupados, la desviación media está dada por:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^N f_i |x_i - \bar{x}|}{N} \quad (13.4)$$

donde $f_1, f_2, \dots, f_N$ son las frecuencias de los datos y las x_i representan los puntos medios de los intervalos de clase.

La *desviación estándar* es una medida de dispersión ampliamente usada. Se define para un conjunto de N números como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad (13.5)$$

Y para datos agrupados en intervalos de clase:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad (13.6)$$

La última medida de dispersión que mencionaremos es la *varianza*, que es el cuadrado de la desviación estándar. Es decir:

$\text{Varianza} = \sigma^2$

(13.7)

✱ EJEMPLO 13.4

Dado los conjuntos de números $A = \{7, 5, 4, 3, 6, 8, 9\}$ y $B = \{1, 3, 6, 5, 9, 2, 16\}$, determina: **a)** La desviación promedio. **b)** La desviación estándar.

Solución

a) Para el conjunto A se tiene:

$$\bar{x} = \frac{7+5+4+3+6+8+9}{7} = 6$$

$$DM = \frac{|7-6| + |5-6| + |4-6| + |3-6| + |6-6| + |8-6| + |9-6|}{7} = 1,71$$

Para el conjunto B :

$$\bar{x} = \frac{1+3+6+5+9+2+16}{7} = 6$$

$$DM = \frac{|1-6| + |3-6| + |6-6| + |5-6| + |9-6| + |2-6| + |16-6|}{7} = 3,71$$

Observa que aunque la media aritmética es la misma para ambos conjuntos de datos, la desviación media del conjunto A es menor que la del conjunto B , lo que indica que los datos del conjunto B están más dispersos que los de A .

b) Para A :

$$\sigma_A^2 = \frac{(7-6)^2 + (5-6)^2 + (4-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (9-6)^2}{7}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1+1+4+9+0+4+9}{7} = 4 \Rightarrow \sigma_A = 2$$

Para B :

$$\sigma_B^2 = \frac{(1-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (5-6)^2 + (9-6)^2 + (2-6)^2 + (16-6)^2}{7}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{25+9+0+1+9+16+100}{7} = 22,86 \Rightarrow \sigma_B = 4,78$$

Como $\sigma_B > \sigma_A$, los datos del conjunto B están más dispersos que los del conjunto A .

Si se hace una representación gráfica de los dos conjuntos de datos, se obtiene la fig. 13.10 que pone de manifiesto lo encontrado en relación con la dispersión de los datos.

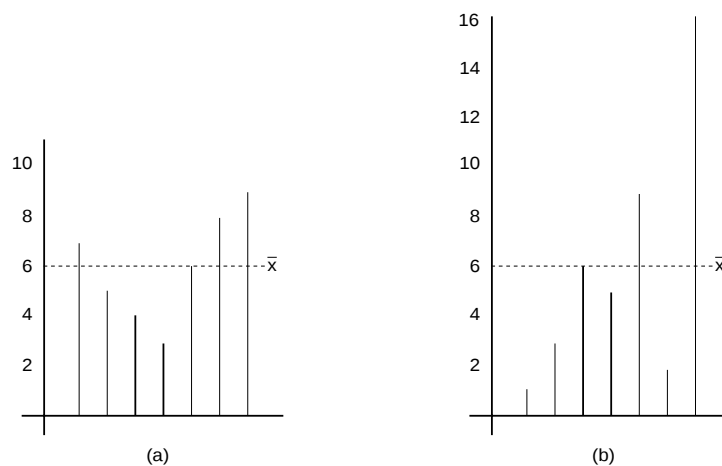


Fig. 13.10 Representación gráfica de los datos para el ejemplo 13.4.

* Ejercicios

13.1 Determina la media aritmética, la moda, la mediana y la desviación estándar de los siguientes conjuntos de datos.

a) $A = \{7, 11, 15, 17, 19, 28, 22\}$ **b)** $B = \{7, 12, 16, 17, 18, 22, 27\}$

13.2 Determina la media aritmética, la moda, el rango, la mediana y la desviación estándar de los siguientes números: 423, 467, 533, 481, 389, 605, 511, 642, 570, 507, 600, 399, 611, 482, 642, 523, 423, 427, 284, 482, 712, 500.

13.3 Determina la media, la mediana, la clase modal y la desviación estándar de los siguientes datos. Dibuja los histogramas correspondientes.

Intervalo	116-120	121-125	126-130	131-135	136-140	141-145	146-150	151-155	156-160
f	5	7	6	9	12	8	7	3	2

PROBABILIDAD

14.1 CONCEPTO DE PROBABILIDAD

La probabilidad es una rama de la Matemática cuyo objetivo es la medida y comprensión de los fenómenos que suceden al azar. Tales fenómenos responden a interrogantes como:

1. ¿Lloverá mañana?
2. ¿Qué número saldrá al lanzar un dado?
3. ¿Nacerá el niño en buenas condiciones?

Cada una de las preguntas de arriba revelan incertidumbre sobre la posibilidad de un resultado y son ejemplos de fenómenos aleatorios, es decir, no se pueden predecir con precisión. Sin embargo, el comportamiento estadístico de esos fenómenos pueden exhibir cierto grado de regularidad. Esto es, es posible estimar, dentro de ciertos parámetros, las respuestas a tales preguntas:

1. Para mañana hay un 70% de probabilidad de lluvia.
2. Es probable que el número 5 salga en un 17% de los casos.
3. Dados los antecedentes de los padres, el niño tiene un 95% de probabilidad de ser normal.

Por supuesto que en cada uno de los casos anteriores los resultados dependen de la distribución que en el pasado han tenido los datos. Así, al decir que hay un 70% de probabilidad de lluvia se supone que, estudiadas las condiciones meteorológicas y la experiencia pasada, existe esa probabilidad de que llueva.

Existen dos maneras de definir probabilidad. A la primera forma se le conoce como *definición clásica o a priori*, mientras que la otra se le conoce como *definición con base experimental o a posteriori*.

14.1.1 Definición clásica de probabilidad (a priori).

Imagina que se lanza una moneda al aire y apostamos a que saldrá cara. Se sabe que al caer la moneda debe salir cara o sello (hay dos opciones).

Entonces tenemos:

n = Número de opciones favorables: 1 (que salga cara)

N = Número total de opciones: 2 (cara + sello)

La probabilidad se denota por la letra P y se define como:

$$P = \frac{\text{Número de opciones favorables}}{\text{Número de opciones posibles}} = \frac{n}{N} \quad (14.1)$$

En el caso del lanzamiento de la moneda se tendrá:

$$n = 1 \quad N = 2 \quad p = \frac{n}{N} = \frac{1}{2} = 0,50 \quad (50\%)$$

Lo que indica que la probabilidad de que salga cara es 0,50 o el 50%. Por extensión, la probabilidad de que salga sello es también 0,50.

La probabilidad es una cantidad numérica cuyo valor es mayor o igual que cero y menor o igual a 1. Podemos escribir entonces:

$$0 \leq P \leq 1 \quad (14.2)$$

La condición $P = 0$ significa que no hay ninguna probabilidad de que la opción favorable tenga lugar. Así, si planteamos el problema del lanzamiento de la moneda en los términos siguientes: "¿cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda sobre un piso de cemento la moneda caiga de canto?", podemos escribir:

n = Número de opciones favorables (que la moneda caiga de canto) = 0

N = Número total de opciones posibles = 2 (cara + sello)

Luego,

$$P = \frac{n}{N} = \frac{0}{2} = 0$$

La condición $P = 1$ significa que con seguridad el evento favorable tendrá lugar. Repetiremos nuevamente el experimento de lanzar la moneda al aire: "¿cuál es la probabilidad de que al lanzar una moneda caiga cara o sello?". Del enunciado anterior deducimos lo siguiente:

n = Número de opciones favorables (que caiga cara o sello) = 2

N = Número total de opciones posibles (cara + sello) = 2

Luego:

$$P = \frac{n}{N} = \frac{2}{2} = 1$$

14.1.2 Definición con base experimental (a posteriori).

Imagina que se lanza una moneda al aire 500 veces y que se obtienen los siguientes resultados:

Número de lanzamientos	Cara	Sello
500	235	265

La probabilidad de que salga sello la definimos como:

$$P = \frac{\text{Número de veces que salió sello}}{\text{Número de veces que se lanzó la moneda}}$$

Sustituyendo valores:

$$P = \frac{265}{500} = 0,53 \quad (53\%)$$

La probabilidad de que salga cara la definimos como:

$$P = \frac{\text{Número de veces que salió cara}}{\text{Número de veces que se lanzó la moneda}}$$

Sustituyendo valores:

$$P = \frac{235}{500} = 0,47 \quad (47\%)$$

Ahora bien, ¿por qué estos valores no coinciden con los previamente calculados (50%)? La respuesta está en el número de lanzamientos que se efectuaron. Si en vez de lanzar la moneda 500 veces se lanza 1.000 veces, el resultado obtenido al sustituir valores en (14.1) y (14.2) se acercará más al valor 0,50 hallado anteriormente.

En general, si tenemos un experimento que se repite N veces, donde N es un número muy grande y se observa que el número de veces que ocurre un evento de interés es n , podemos definir probabilidad como:

$$P = \frac{\text{Número de veces que ocurre un evento de interés}}{\text{Número de veces que tiene lugar un experimento}} = \frac{n}{N} \quad (14.3)$$

✿ EJEMPLO 14.1

En un salón de clases hay 38 alumnos, de los cuales 14 son hembras y el resto varones. El profesor selecciona al azar un alumno para hacer una pregunta: **(a)** ¿Qué probabilidad hay de que seleccione una hembra? **(b)** ¿Qué probabilidad hay de que seleccione un varón? **(c)** ¿Qué probabilidad hay de que seleccione a Patricia?

☆ Solución

a) Como el número de hembras es 14: $n = 14$

Dado que hay 38 alumnos: $N = 38$

$$P_1 = \text{Probabilidad de seleccionar una hembra} = \frac{14}{38} = 0,368 \quad (36,8\%)$$

b) Como el número de varones es $38 - 14 = 24$: $n = 24$. Luego,

$$P_2 = \text{Probabilidad de seleccionar un varón} = \frac{24}{38} = 0,632 \quad (63,2\%)$$

Observa que $\frac{14}{38} + \frac{24}{38} = 1$ (¿Por qué?).

c) Como Patricia es sólo un alumno entre los 38 del salón: $n = 1$

La probabilidad de que el profesor seleccione a Patricia es:

$$P = \frac{1}{38} = 0,026 \quad (2,6\%)$$

Es decir, la probabilidad de que el profesor le pregunte a un alumno en particular, en este caso Patricia, es muy pequeña.

14.2 EXPERIMENTOS Y ESPACIO MUESTRAL

Consideremos la ruleta mostrada en la fig. 14.1. En el centro de la misma se encuentra una aguja que al ser rotada puede caer en cualquiera de los 4 sectores mostrados. El *experimento* a realizar consiste en rotar la aguja 20 veces y observar los *resultados*. Hay 4 posibles resultados. Al conjunto de estos resultados se le denomina *espacio muestral* y se le representa por la letra S . En este caso, el espacio muestral está dado por:

$$S = \{\text{Azul, Rojo, Verde, Negro}\}$$

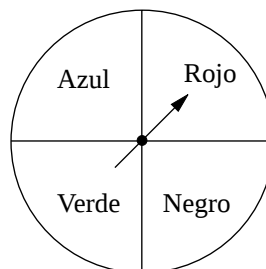


Fig. 14.1 La aguja, al girar libremente puede caer en cualquier sector de la ruleta.

Entonces, para un experimento aleatorio cualquiera, el *espacio muestral* es el conjunto de todos los resultados posibles del experimento.

A cualquier conjunto del espacio muestral que contenga los resultados que satisfacen una condición dada, se le denomina un *evento*. Si el evento es un conjunto que contiene un solo resultado del espacio muestral, se le llama *evento simple*. A todos los otros subconjuntos no vacíos del espacio muestral, se les llama *eventos compuestos*. Un evento compuesto puede ser expresado como la unión de eventos simples. A los eventos los representaremos por la letra E . Los eventos simples del ejemplo citado al comienzo son:

$$E \{\text{Azul}\} \quad E \{\text{Rojo}\} \quad E \{\text{Verde}\} \quad E \{\text{Negro}\}$$

Como eventos compuestos podemos citar:

$$E \{\text{Azul, Rojo}\} \quad E \{\text{Azul, Rojo, Negro}\}$$

Entonces, si S representa el espacio muestral de un experimento y E un evento del mismo, la probabilidad del evento E está dada por:

$$P(E) = \frac{\text{Número de resultados en } (E)}{\text{Número de resultados en } (S)} \quad (14.4)$$

✱ EJEMPLO 14.2

¿Cuál es la probabilidad que al lanzar un dado el resultado sea un número mayor de 2? ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Cuáles son los eventos simples? ¿Cuál es el evento compuesto?

☆ Solución

El espacio muestral está dado por todos los posibles resultados del experimento:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Los eventos simples son:

$$E \{1\} \quad E \{2\} \quad E \{3\} \quad E \{4\} \quad E \{5\} \quad E \{6\}$$

El evento compuesto de interés está formado por los números mayores que 2:

$$E \{3, 4, 5, 6\}$$

De acuerdo con la definición (14.4), se tiene:

Número de resultados en E : 4Número de resultados en S : 6

$$P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

✱ EJEMPLO 14.3

a) Se lanzan dos dados, uno de color negro y otro de color rojo, y se observa cuál es la suma de los resultados. ¿Cuál es el espacio muestral? **b)** Determina las probabilidades de los eventos simples.

☆ Solución

En el dibujo siguiente se muestran los resultados posibles y la frecuencia de los mismos.

Resultado		Frecuencia
2		1
3		2
4		3
5		4
6		5
7		6
8		5
9		4
10		3
11		2
12		1
Total		36

a) El espacio muestral es:

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

b) El espacio muestral está compuesto por 36 posibles resultados. Las probabilidades de los eventos simples son:

$$P(2) = \frac{1}{36} \quad P(3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \quad P(4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \quad P(5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(6) = \frac{5}{36}$$

$$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(8) = \frac{5}{36}$$

$$P(9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

$$P(10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(12) = \frac{1}{36}$$

✱ Ejercicios

14.1 Toma una página de una guía telefónica y anota la frecuencia de ocurrencia del último dígito de los números de teléfonos. ¿Cuál es el espacio muestral?

14.2 Se lanza una moneda tres veces consecutivas y se anota el resultado, cara o sello. **(a)** ¿Cuál es el espacio muestral? **(b)** ¿Tienen los distintos resultados la misma posibilidad de aparecer? **(c)** ¿Cuál es la probabilidad de cada resultado? **(d)** ¿Cuál es la probabilidad que salgan al menos dos caras? **(e)** ¿Cuál es la probabilidad que salgan exactamente dos caras?

14.3 Se lanza una moneda y un dado. **(a)** ¿Cuál es el espacio muestral del experimento? **(b)** ¿Cuáles son los eventos simples? **(c)** ¿Cuál es la probabilidad de cada resultado?

14.4 En 29 tarjetas de crédito se anotan las 29 letras del alfabeto y se saca una tarjeta al azar. **(a)** ¿Cuál es el espacio muestral? **(b)** ¿Cuál es la probabilidad de cada resultado? **(c)** ¿Cuál es la probabilidad que la tarjeta seleccionada contenga una vocal? **(d)** ¿Cuál es la probabilidad que la tarjeta contenga una letra entre *i* y *q*?

14.5 Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad que: **(a)** ambos muestren el mismo número? **(b)** La suma de los dos dados sea un número primo?

14.6 Una gaveta contiene 5 medias azules, 6 grises, 8 negras, 4 verdes, 3 blancas y 7 marrones. ¿Cuál la probabilidad que al sacar una media al azar resulte: **a)** Azul? **b)** Verde? **c)** No azul?

14.7 El juego de BINGO tiene 75 números divididos por igual entre cinco grupos. Los números 1-15 están asociados con la letra *B*; 16-30 con *I*; 31-45 con *N*; 46-60 con *G* y 61-75 con *O*. Si se selecciona un número al azar, determina la probabilidad que: **a)** Sea un número asociado con *B*. **b)** Se selecciona un número asociado a una vocal. **c)** Se selecciona un número asociado con *B* o *G*.

14.3 TEOREMAS SOBRE PROBABILIDAD

Estudiaremos a continuación cómo determinar las probabilidades de la unión e intersección de dos o más eventos conocida la posibilidad de los

eventos simples. Se considerarán sólo experimentos que tengan un número finito de eventos simples.

Teorema 1: Dado un experimento con un espacio muestral finito, S , la probabilidad de un evento E es igual a la suma de las probabilidades de los eventos simples que conforman a E .

Supongamos, por ejemplo, que el espacio muestral S está dado por:

$$S = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$$

y que las probabilidades de los eventos simples son:

$$P(S_1) = 0,4 \quad P(S_2) = 0,2 \quad P(S_3) = 0,1 \quad P(S_4) = 0,1 \quad P(S_5) = 0,2$$

Si se seleccionan los eventos

$$E = \{S_1, S_2\} \quad F = \{S_1, S_4, S_5\}$$

Las probabilidades de los eventos E y F son:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(S_1) + P(S_2) = 0,4 + 0,1 = 0,5 \\ P(F) &= P(S_1) + P(S_4) + P(S_5) = 0,4 + 0,1 + 0,2 = 0,7 \end{aligned}$$

Cuando dos eventos, E y F , del espacio muestral S no tienen elementos (eventos simples) en común, se dice que son *mutuamente excluyentes*. Para tales eventos se cumple:

$$E \cap F = \emptyset$$

Es decir, su intersección es el conjunto vacío ($\emptyset$).

Teorema 2: Si E y F son eventos mutuamente excluyentes del espacio muestral S , entonces:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) \quad (14.5)$$

En general, para n eventos mutuamente excluyentes se cumple:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) \quad (14.6)$$

✱ EJEMPLO 14.4

Considera nuevamente el experimento del ejemplo 14.4 en el cual se lanzan dos dados y se observa la suma de los resultados. El espacio muestral es:

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Los eventos:

$$E = \{2, 9\} \quad F = \{3, 4, 6, 11\} \quad G = \{5, 7\} \quad H = \{8, 12\}$$

son mutuamente excluyentes (¿Por qué?). Las probabilidades de estos eventos son:

$$P(E) = P(2) + P(9) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}$$

$$P(F) = P(3) + P(4) + P(6) + P(11) = \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{2}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$P(G) = P(5) + P(7) = \frac{4}{36} + \frac{6}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$P(H) = P(8) + P(12) = \frac{5}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Considera ahora un evento E del espacio muestral S . Al conjunto E' que contiene todos los resultados de S no contenidos en E , se le conoce como evento complementario de E . Los eventos E y E' son mutuamente excluyentes, por lo que podemos escribir:

$$P(E \cup E') = P(E) + P(E')$$

Ahora bien, como $E \cup E' = S$ y $P(S) = 1$, podemos escribir:

$$1 = P(E) + P(E')$$

El resultado anterior puede sintetizarse en el siguiente teorema:

Teorema 3: Si E' es el evento complementario de E en el espacio muestral finito S , podemos escribir:

$$P(E') = 1 - P(E)$$

✱ EJEMPLO 14.5

¿Cuál es la probabilidad que no salga 3 al lanzar un dado?

☆ Solución

El espacio muestral está dado por todos los posibles resultados:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

El evento E , que salga 3, lo escribimos como $E = \{3\}$ y el evento complementario E' es:

$$E' = \{1, 2, 4, 5, 6\}$$

La probabilidad de E es: $P(E) = \frac{1}{6}$

La probabilidad de E' es: $P(E') = P(3) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Observa que $P(E')$ se puede calcular también como:

$$P(E') = P(1) + P(2) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

✱ EJEMPLO 14.6

Determina la probabilidad de obtener una suma mayor que 3 al lanzar dos dados.

☆ **Solución**

La probabilidad de obtener 2 y 3 está dada, de acuerdo con el ejemplo 14.4 por:

$$P(2) = \frac{1}{36} \qquad P(3) = \frac{2}{36}$$

Luego, la probabilidad de obtener 2 o 3 es:

$$P(2 \cup 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$$

El evento E es igual a $\{2, 3\}$. El evento E' es el compuesto de resultados mayores que 3:

$$E' = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

La probabilidad del evento complementario E' está dada por:

$$P(E') = 1 - P(E) = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

Cuando dos eventos E y F no son mutuamente excluyentes, la probabilidad $P(E + F)$ no es igual a la suma de $P(E) + P(F)$, como lo establece el siguiente teorema:

Teorema 4: Si E y F son eventos en un espacio muestral S , la probabilidad de la unión de los elementos E y F está dada por:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \qquad (14.7)$$

✱ EJEMPLO 14.7

En el experimento de lanzamiento de dos dados para observar la suma que se obtiene, se presentaban los siguientes resultados:

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

Designemos como el evento E aquel asociado a un número mayor que 4 y el evento F al asociado a un número menor que 8. Es decir:

$$E = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \quad F = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Los eventos E y F no son mutuamente excluyentes, ya que:

$$E \cap F = \{5, 6, 7\}$$

La unión de E y F es el espacio muestral S :

$$E \cup F = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} = S$$

Calculemos las probabilidades $P(E)$ y $P(F)$:

$$P(E) = P(5) + P(6) + P(7) + P(8) + P(9) + P(10) + P(11) + P(12)$$

$$P(F) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7)$$

De acuerdo con los resultados del ejemplo 14.4:

$$P(E) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{5}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

$$P(F) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

Si tratáramos ahora de calcular la probabilidad de la unión de E y F , $P(E \cup F)$, como la suma de las probabilidades de E y F , obtendríamos:

$$P(E \cup F) = \frac{30}{36} + \frac{21}{36} = \frac{51}{36} = \frac{17}{12} > 1$$

lo que es absurdo, ya que $0 \leq P \leq 1$.

En realidad, lo que sucede es que al calcular $P(E \cup F)$ como $P(E) + P(F)$, al no ser los eventos mutuamente excluyentes, se está sumando dos veces la probabilidad de la intersección, $P(5, 6, 7)$. Para obtener el valor correcto, debemos restar esta probabilidad:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Como:

$$P(E \cap F) = P(5, 6, 7) = P(5) + P(6) + P(7) = \frac{4}{36} + \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Se tiene:

$$P(E \cup F) = \frac{30}{36} + \frac{21}{36} - \frac{15}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

Observa que como $E \cup F = S$, su probabilidad es 1.

✱ EJEMPLO 14.8

De un conjunto de 40 cartas españolas se saca al azar una carta. ¿Cuál es la probabilidad que dicha carta sea un caballo o sea de copa?

☆ Solución

El espacio muestral consta de 40 cartas: 10 de oro, 10 de copa, 10 de espada y 10 de basto. La probabilidad de sacar una carta específica es $\frac{1}{40}$. Al evento que consiste en sacar un caballo lo designaremos por E :

$$E = \{\text{caballo de oro, caballo de copa, caballo de espada, caballo de basto}\}$$

El evento F consiste en sacar una carta de copa (c):

$$F = \{1c, 2c, 3c, 4c, 5c, 6c, 7c, \text{sota de copa, caballo de copa, rey de copa}\}$$

Los dos eventos, E y F , no son mutuamente excluyentes, ya que:

$$E \cap F = \{\text{caballo de copa}\}$$

Las probabilidades de E , F y $E \cap F$ son:

$$P(E) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10} \quad P(F) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \quad P(E \cap F) = \frac{1}{40}$$

Luego, la probabilidad que la carta sea un caballo o sea de copa es:

$$P\{E \cup F\} = P\{E\} + P\{F\} - P\{E \cap F\} = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

* Ejercicios

14.8 Se tiene una caja con fichas numeradas de 1 hasta 100. Establece cuáles son las posibles resultados de los eventos que satisfacen las condiciones dadas y encuentra la probabilidad de los mismos: **a)** El número es impar. **b)** El número es par. **c)** El número es un múltiplo de 5. **d)** El número posee dos dígitos. **e)** El número es mayor que 75. **f)** El número es divisible por 10. **g)** El número es primo.

14.9 ¿Cuál de los siguientes eventos son mutuamente excluyentes si el espacio muestral son los números del 1 al 100? Determina $E \cup F$, $E \cap F$ y $P(E \cup F)$.

- | | |
|---|---|
| a) E : El número es par. | F : El número es impar. |
| b) E : El número es múltiplo de 5. | F : El número es par. |
| c) E : El número es mayor que 75. | F : El número es menor que 50. |
| d) E : El primer dígito del número es 1. | F : El último dígito del número es 2. |
| e) E : El número es divisible por 10. | F : El número es impar. |
| g) E : El número tiene 1 dígito. | F : El número es divisible por 11. |

14.10 Dado un conjunto de barajas españolas de 40 cartas, determinar el evento complementario y su probabilidad para los siguientes eventos si se saca una sola carta: **a)** La carta es basto. **b)** La carta es una sota o un caballo.

14.4 PROBABILIDAD CONDICIONAL

Consideremos el experimento de lanzar un dado y observar el resultado. El espacio muestral está dado por:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

La probabilidad de cualquiera de los resultados es $1/6$. Entonces, por ejemplo:

$$P(3) = \frac{1}{6}$$

Supongamos ahora que nos hacemos lo siguiente: "si el número obtenido es impar, ¿cuál es la probabilidad que el número sea 3? Indudablemente que la primera afirmación (el número obtenido es impar) condiciona la probabilidad de que se obtenga el número 3, ya que en este caso los resultados podrían ser 1, 3 o 5, por lo que:

$$P(3, \text{ si el número es impar}) = \frac{1}{3}$$

Si en el ejemplo que estamos tratando designamos:

E = Se obtiene un 3.

F = El número obtenido es impar.

la probabilidad de que el número obtenido sea 3, a sabiendas que es impar, se simboliza como:

$$P(E/F)$$

En general, la probabilidad de que un evento E cualquiera suceda, dado que el evento F sucedió, se designa como $P(E/F)$ y se denomina *probabilidad condicional de E dado F*.

A fin de deducir una fórmula para la probabilidad condicional, tomemos un espacio muestral S de n elementos:

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$$

Supongamos que el evento F contiene m elementos de los n de S y que el evento dado por la intersección de E y F , $E \cap F$ contiene l de los n elementos de S . Podemos escribir:

$$P(F) = \frac{m}{n} \qquad P(E \cap F) = \frac{l}{n}$$

Como el evento F sucedió, el resultado del experimento debe ser uno de los m elementos en F . De estos m elementos, hay un resultado para los cuales E puede suceder. Entonces:

$$P(E/F) = \frac{l}{m}$$

Dividiendo el numerador y denominador por n : $P(E/F) = \frac{l/n}{m/n}$

Como $\frac{l}{n} = P(E \cap F)$ y $\frac{m}{n} = P(F)$, tendremos:

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

(14.8)

✱ EJEMPLO 14.9

¿Cuál que de un juego de 40 cartas españolas se obtenga una sota, caballo o rey, si la carta seleccionada es de oro?

Solución

Sean:

E : evento dado por sota, caballo o rey.

F : evento dado por carta de oro.

Hay 10 cartas de oro y, por tanto:

$$P(F) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

La intersección de E y F está dada por:

$$(E \cap F) = \{\text{sota de oro, caballo de oro, rey de oro}\}$$

Luego:

$$P(E \cap F) = \frac{3}{40}$$

Entonces, la probabilidad de sacar una sota, caballo o rey si la carta seleccionada es de oro será, según (14.7):

$$P(E/F) = \frac{3/40}{10/40} = \frac{3}{10}$$

✱ EJEMPLO 14.10

De los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7 se seleccionan dos números al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos sean impares, si se sabe que la suma de las dos es un número par?

☆ Solución

Sean:

E : ambos números son impares.

F : la suma es un número par.

Como hay 7 números, el número de maneras de seleccionarlos de dos en dos es $C_{7,2}$:

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5! \cdot 2} = 21$$

Para que la suma de dos números sea par es necesario que ambos sean pares o ambos sean impares. Hay 3 números pares, de los cuales se seleccionarán dos y las maneras de hacerlos es $C_{3,2}$:

$$C_{3,2} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$$

Como hay 4 números impares, éstos pueden ser seleccionados de 2 en 2 de $C_{4,2}$ maneras distintas:

$$C_{4,2} = \frac{2! \cdot 3 \cdot 4}{2! \cdot 2!} = 6$$

Es decir, se pueden seleccionar dos números pares o dos números impares de $6 + 3 = 9$ maneras distintas. Por tanto:

$$P(F) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

El evento $E \cap F$ engloba a los números impares que al sumarlos resulta un número par:

$$E \cap F = \{(1, 3), (1, 5), (1, 7), (3, 5), (3, 7), (5, 7)\}$$

Luego:

$$P(E \cap F) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

Por tanto:

$$P(E/F) = \frac{2/7}{3/7} = \frac{2}{3}$$

Observa que el problema anterior pudo resolverse también si se anotan los resultados favorables:

$$(1, 3) \ (1, 5) \ (1, 7) \ (3, 5) \ (3, 7) \ (5, 7) \quad (6 \text{ resultados favorables})$$

Las parejas impares cuya suma es par, son:

$$(2, 4) \quad (2, 6) \quad (4, 6)$$

En total son, como habíamos también determinado antes, 9 resultados. Por tanto, la probabilidad buscada es:

$$P(E/F) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

14.5 EVENTOS INDEPENDIENTES

Si $P(E/F) = P(E)$, es decir, si la probabilidad de que E ocurra no es afectada por la ocurrencia o no ocurrencia de F , se dice que E y F son *eventos independientes*. De acuerdo con la relación (14.8):

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \Rightarrow P(E \cap F) = P(F) \cdot P(E/F)$$

Sustituyendo por $P(E)$:

$$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F) \quad (14.9)$$

Entonces, si (14.9) se cumple, los eventos E y F son independientes. En general, para n eventos independientes se cumple:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \dots \cdot P(E_n) \quad (14.10)$$

✱ EJEMPLO 14.11

Una caja contiene 5 bolas blancas y 4 bolas rojas. Se saca una bola al azar y se vuelve a colocar en la caja. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola blanca y una roja en sucesión?

☆ **Solución**

La probabilidad de sacar una bola blanca en el primer intento es:

$$P(B) = \frac{5}{9}$$

La probabilidad de sacar una bola roja en el segundo intento es:

$$P(R) = \frac{4}{9}$$

Los dos sucesos son independientes, ya que sacar una bola blanca en el primer intento no afecta la probabilidad de obtener una bola roja en el segundo intento. Por tanto:

$$P = P(B) \cdot P(R) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{81}$$

✱ EJEMPLO 14.12

Los tres elementos de un bombillo son: el encapsulado de vidrio, el filamento y la base. Estos elementos son fabricados independientemente y se sabe que:

- a) La probabilidad de que el encapsulado sea defectuoso es $P(E) = 0,02$.
- b) La probabilidad de que el filamento sea defectuoso es $P(F) = 0,03$.
- c) La probabilidad de que la base sea defectuosa es $P(B) = 0,01$.

¿Cuál es la probabilidad de que un bombillo seleccionado al azar no resulte defectuoso?

☆ **Solución**

La probabilidad de que el encapsulado no sea defectuoso es:

$$P(E') = 1 - 0,02 = 0,98$$

La probabilidad de que el filamento no sea defectuoso es:

$$P(F') = 1 - 0,03 = 0,97$$

La probabilidad de que el filamento no sea defectuoso es:

$$P(B') = 1 - 0,01 = 0,99$$

Como los sucesos son independientes y todos contribuyen a que un bombillo no sea defectuoso, la probabilidad buscada es:

$$P = P(E') \cdot P(F') \cdot P(B') = 0,98 \cdot 0,97 \cdot 0,99 = 0,941$$

* Ejercicios

14.11 Dados los eventos E y F de un experimento tales que:

$$P(E) = 0,7 \quad P(F) = 0,4 \quad P(E \cap F) = 0,2$$

determina $P(E/F)$ y $P(F/E)$.

14.12 Un dado es lanzado dos veces. Determina la probabilidad de obtener 4, 5, o 6 en el primer lanzamiento y 1, 2, 3 o 4 en el segundo lanzamiento.

14.13 Se seleccionan dos cartas al azar de un conjunto de 52 cartas de póker. Determina la probabilidad de que ambas cartas sean ases si la primera carta es: **a)** Reemplazada. **b)** No reemplazada.

14.14 Una caja contiene 6 lápices rojos, 4 blancos y 5 azules. Determina la probabilidad que se extraigan en el orden rojo, blanco y azul si cada lápiz es: **a)** Reemplazado, **b)** No reemplazado.

14.15 Una caja contiene 4 bolas blancas y 2 bolas negras. Otra caja contiene 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Se extrae una bola de cada caja. Determina la probabilidad que: **a)** Ambas sean blancas, **b)** Ambas sean negras, **c)** Una sea blanca y otra negra.

14.16 Se seleccionan dos dígitos entre los dígitos 1 a 9. **a)** ¿Cuál es la probabilidad de que su suma sea impar? **b)** ¿Cuál es la probabilidad de que su suma sea par? **c)** Si la suma de los dos dígitos es par, ¿cuál es la probabilidad de que ambos dígitos sean números pares?.

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

1.4 Infinitas rectas **1.5** 10 **1.6 a)** 6 **b)** 3 **1.7** Infinitos planos **1.8** Si **1.9** No

1.15 a) $\overrightarrow{AB} = \langle 2, 3, 4 \rangle$ **b)** $\overrightarrow{MN} = \langle -1, 3, -3 \rangle$ **c)** $\overrightarrow{PQ} = \langle 2, -2, 3 \rangle$ **d)** $\overrightarrow{RS} = \langle 3, -3, -2 \rangle$

1.18 a) $u = \sqrt{14}$ $\alpha = 36,67^\circ$ $\beta = 57,67^\circ$ $\gamma = 74,49^\circ$
b) $v = \sqrt{14}$ $\alpha = 122,32^\circ$ $\beta = 143,33^\circ$ $\gamma = 105,50^\circ$
c) $v = 5$ $\alpha = 36,87^\circ$ $\beta = 53,13^\circ$ $\gamma = 0^\circ$
d) $MN = 5$ $\alpha = 53,13^\circ$ $\beta = 0$ $\gamma = 36,87^\circ$
e) $MN = \sqrt{22}$ $\alpha = 64,76^\circ$ $\beta = 50,23^\circ$ $\gamma = 129,77^\circ$
f) $PQ = \sqrt{24}$ $\alpha = 65,91^\circ$ $\beta = 114,09^\circ$ $\gamma = 35,28^\circ$

1.19 B(2,3,-1)

2.1 $\vec{A} + \vec{B} = \langle -2, 9, 7 \rangle$ $\vec{A} + \vec{C} = \langle 9, -7, -1 \rangle$ $\vec{B} + \vec{C} = \langle 5, -6, 12 \rangle$

2.2 a) $\vec{B} = \langle 4, -1, 11 \rangle$ **b)** $\vec{B} = \langle 2, -4, 5 \rangle$ **c)** $\vec{B} = \langle 1, 1, 2 \rangle$

2.3 a) $\langle -1, -2, 0 \rangle$ **b)** $\langle 3, 2, -1 \rangle$ **c)** $\langle 0, 0, 0 \rangle$ **d)** $\langle 3, 0, 3 \rangle$

2.4 a) $\vec{u}' = \langle -2, -3, -3 \rangle$ **b)** $\vec{v}' = \langle -3, 2, -4 \rangle$ **c)** $\overrightarrow{(AB)'} = \langle 0, -3, -4 \rangle$ **d)** $\overrightarrow{(PQ)} = \langle 0, 0, 3 \rangle$

2.5 a) $\langle -3, 5, -10 \rangle$ **b)** $\langle 8, 0, -6 \rangle$ **c)** $\langle -1, 2, 9 \rangle$ **d)** $\langle -4, 7, -1 \rangle$

e) $\langle 5, -8, 29 \rangle$ **f)** $\langle -3, -2, -6 \rangle$ **g)** $\langle 3, -5, 10 \rangle$ **h)** $\langle 8, -14, 2 \rangle$

i) $\langle 8, -7, -2 \rangle$

2.6 a) $\overrightarrow{AB} = \langle -1, 5, -9 \rangle$ **b)** $\vec{u} = \langle -1, 5, -9 \rangle$ **c)** $N(0, 7, -6)$ $\overrightarrow{MN} = \langle -1, 5, -9 \rangle$

2.7 $C(-\frac{15}{2}, \frac{3}{2}, 7)$ **2.8** $C(15, 26, 8)$ **2.9** $(0, 2, 8)$ **2.10** $P(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ $Q(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

2.11 a) $\langle -8, -2, 2 \rangle$ **b)** $\langle 2, 2, 4 \rangle$ **c)** $\langle -13, -4, 1 \rangle$ **d)** $\langle -5, -2, -1 \rangle$

e) $\langle -1, -4, -11 \rangle$ **f)** $\langle 8, 2, -2 \rangle$

2.12 $T_1 = 17,674,42 \text{ N}$ $T_2 = 11,627,91 \text{ N}$ **2.13** $T_1 = 110,48 \text{ N}$ $T_2 = 120,43 \text{ N}$

2.14 $T_2 = 68,40 \text{ N}$

2.15 $\vec{F}_1 = \langle -110, 166 \rangle$ $\vec{F}_2 = \langle 86, -51 \rangle$ $\vec{F}_3 = \langle -24, 115 \rangle$

2.16 $\vec{F}_{AC} = \langle 106, 58, 49, 70 \rangle$ $\vec{F}_{AB} = \langle 106, 61, 106, 61 \rangle$

2.17 $T_{AB} = 143,65 \text{ N}$ $T_{BC} = 243,48 \text{ N}$

2.18 $T_{BA} = 987,60 \text{ N}$

$T_{BC} = 1.539,38 \text{ N}$

2.19 a) $F_x = 70,71 \text{ N}$

$F_y = 122,47 \text{ N}$

$F_z = 141,42 \text{ N}$

$\alpha = 69,30^\circ$

$\beta = 52,24^\circ$

$\gamma = 45^\circ$

b) $F_x = 176,04 \text{ N}$

$F_y = 147,72 \text{ N}$

$F_z = 192,84 \text{ N}$

$\alpha = 54,07^\circ$

$\beta = 60,50^\circ$

$\gamma = 50^\circ$

2.20 Con coordenadas con centro en B: $F_x = -8.000 \text{ N}$, $F_y = -13.856,40 \text{ N}$, $F_z = 120.000 \text{ N}$

3.1 a) $\langle -2, 8, 11 \rangle$

b) $\langle 1, 34, -7 \rangle$

c) $\langle -9, 8, 11 \rangle$

3.2 a) $\alpha = -3$

$\beta = 1/2$

b) $\alpha = 5$

$\beta = 3$

c) $\alpha = -1/3$

$\beta = 7$

3.3 a) No existen

b) No existen

c) No existen

3.4 a) $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{z}$

b) $\vec{w} = -\vec{u} - \frac{1}{15}\vec{v} + \frac{12}{5}\vec{z}$

c) $\vec{w} = \frac{63}{95}\vec{u} - \frac{47}{57}\vec{v} + \frac{39}{19}\vec{z}$

3.5 a) $\vec{u} = -\vec{v} + 2\vec{w} + 2\vec{x} + \vec{z}$

b) $\vec{u} = \vec{v} - 2\vec{w} + \vec{x} + \vec{z}$

3.6 a) Si

b) Si

c) No

d) Si

3.7 a) No

b) Si, $\vec{z} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v} - \vec{w}$

c) Si, $\vec{z} = \frac{10}{13}\vec{u} - \frac{10}{39}\vec{v} - \frac{3}{13}\vec{w}$

d) Si, $\vec{z} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{7}{10}\vec{v} + \frac{3}{10}\vec{w}$

3.8 a) $\vec{u} = 3\vec{i} - 10\vec{j} + 4\vec{k}$

b) $\vec{v} = -5\vec{j} - 3\vec{k}$

c) $\vec{w} = -4\vec{i}$

d) $\vec{w} = -8\vec{i} + 6\vec{j}$

3.9 a) -16

b) $u = 3,74$; $v = 8,77$

3.10 $\alpha = 155,56^\circ$; $\alpha = 93,92^\circ$

3.11 a) $x = 3$

b) $x = 3$

3.12 a) $x = 3$

b) $x = 6$ o $x = -3$

3.13 a) $\alpha = 97,48^\circ$; $\beta = 24,31^\circ$; $\gamma = 67,01^\circ$

b) $\alpha = 110,41^\circ$; $\beta = 62,29^\circ$; $\gamma = 35,54^\circ$

c) $\alpha = 53,30^\circ$; $\beta = 135,82^\circ$; $\gamma = 68,99^\circ$

3.14 a) Si

b) No

4.2 a) Orden: 3×4 $A^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

b) Orden 4×2 $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{c) Orden } 3 \times 4 \quad A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ -5 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$4.3 \quad \text{a) } x = \frac{1}{3} \quad y = 2 \quad \text{b) } x = 4 \quad y = -5 \quad \text{c) } x = 3 \quad y = 2 \quad z = 0$$

$$4.5 \quad \text{a) } 4 \times 4 \quad \text{b) } 4 \times 2 \quad \text{c) } 3 \times 5$$

$$4.6 \quad \text{a) } x = 2, y = 0 \quad \text{b) } x = 6, y = 0, z = 7 \quad \text{c) } x = 6, y = 2, z = 2$$

$$4.7 \quad \text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) No posible} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 2,5 & 2 & -0,4 \\ 1,6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 7 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$4.8 \quad \text{a) } \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ x & y+2 \\ y-x & 3-y \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.9 \quad \text{a) } \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ -11 & -11 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -19 & -6 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} -4 & -4 & 12 & 6 \\ -27 & 7 & -4 & 15 \\ -16 & 0 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 4 & -6 & 0 & 8 \\ 10 & -16 & -2 & 20 \\ -8 & 13 & 2 & -16 \\ 3 & -5 & -1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{f) No posible} \quad \text{g) } \begin{bmatrix} 4 & -1 & 22 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{h) } \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4.10 \quad \text{a) } \begin{bmatrix} 6 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & -3 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{b) } AB = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 13 & 6 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 5 \\ 7 & 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} -3 & -14 & -3 \\ 8 & -1 & -16 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) No válida} \quad \text{e) } \begin{bmatrix} -5 & -22 \\ 23 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{f) } \begin{bmatrix} -22 & 20 \\ 51 & -40 \end{bmatrix} \quad \text{g) } \begin{bmatrix} 26 & 7 & -12 \\ -8 & 4 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\text{h) } \begin{bmatrix} 10 & 20 & -30 \\ 20 & -10 & 40 \end{bmatrix} \quad \text{i) } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{j) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{l) } \begin{bmatrix} -6 & 13 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{l) } (C + E)^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad C^T + E^T = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4.11 \quad \text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4.12 \quad a = 3 \quad b = 1 \quad c = 11 \quad d = -1$$

$$4.14 \quad \text{a)} \begin{bmatrix} x^2 - 2xy & -2y^2 + xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 3x + 2y + 2z & x + z & -z \end{bmatrix}$$

$$4.15 \quad \text{a)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$4.16 \quad \text{a)} -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b)} \text{ No existe} \quad \text{c)} -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{d)} -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 & -9 & 10 \\ -4 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{e)} -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -14 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{f)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{g)} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -9 & 0 & 6 \\ 7 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{h)} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ -5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{i)} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -6 & -22 & -13 \end{bmatrix} \quad \text{j)} -\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -7 & -1 & 10 \\ -3 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{k)} \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 16 & 0 & 8 & 10 \\ 8 & 0 & 16 & 8 \\ -32 & 16 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{l)} \frac{1}{215} \begin{bmatrix} -173 & 73 & 62 & -22 \\ 396 & -141 & 1 & 69 \\ -11 & -14 & -6 & 16 \\ 305 & -120 & 10 & 45 \end{bmatrix}$$

$$4.17 \quad \text{a)} x = 5, y = -3 \quad \text{b)} x = 0, y = 2, z = 3 \quad \text{c)} x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$$

$$\text{d)} x = 1, y = -2, z = 2 \quad \text{e)} x = \frac{2}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = 0 \quad \text{f)} x = \frac{1}{13}, y = -\frac{4}{13}, z = -\frac{5}{13}$$

$$5.1 \quad \text{a)} 2 \quad \text{b)} 7 \quad \text{c)} -13 \quad \text{d)} -38 \quad \text{e)} -21 \quad \text{f)} -36 \quad \text{g)} 0$$

$$\text{h)} x^3 + 2y^3 - 3xy^2 \quad \text{i)} 4xyz \quad \text{j)} -5 \quad \text{k)} -4 \quad \text{l)} -6 \quad \text{m)} 3$$

$$\text{n)} -65 \quad \text{o)} x^3 + x^2 + x$$

$$5.2 \quad \text{a)} x = 1, y = 3 \quad \text{b)} x = \frac{1}{2}(a+b) \quad y = \frac{1}{2}(a-b) \quad \text{c)} x = \frac{1}{19} \quad y = \frac{7}{19}$$

$$\text{d)} x = -\frac{1}{3} \quad y = \frac{2}{3} \quad \text{e)} x = \frac{3}{2} \quad y = \frac{3}{2} \quad \text{f)} x = 20 \quad y = 12$$

$$\text{g)} x = 1 \quad y = \frac{1}{2} \quad z = \frac{3}{2} \quad \text{h)} x = 1 \quad y = 2 \quad z = 3 \quad \text{i)} x = -\frac{186}{55} \quad y = \frac{92}{55} \quad z = -\frac{7}{5}$$

$$\text{j)} x = 1 \quad y = -1 \quad z = 2 \quad \text{k)} x = \frac{17}{6} \quad y = \frac{5}{3} \quad z = -3 \quad \text{l)} x = -\frac{3}{7} \quad y = -\frac{1}{2} \quad z = \frac{11}{14}$$

$$5.4 \quad \text{a)} x = -12 \quad \text{b)} \frac{11}{14} \quad \text{c)} x = \frac{5 \pm \sqrt{193}}{6}$$

$$5.5 \quad \text{a)} 0 \quad \text{b)} -5 \quad \text{c)} 168 \quad \text{d)} 156 \quad \text{e)} -114 \quad \text{f)} -7 \quad \text{g)} 624 \quad \text{h)} 201 \quad \text{i)} 30$$

$$5.6 \quad \text{a)} x = \frac{3 \pm \sqrt{15}i}{4} \quad \text{b)} x = 0 \quad x = 1 \quad \text{c)} x = \frac{11}{2}$$

$$5.7 \quad \text{a)} x = \frac{12}{5} \quad y = \frac{7}{5} \quad z = -\frac{6}{5} \quad \text{b)} x = 6 \quad y = -6 \quad z = -6 \quad \text{c)} x = 2 \quad y = -2 \quad z = -1$$

$$\text{d)} x = -\frac{47}{20} \quad y = \frac{43}{5} \quad z = \frac{101}{20} \quad w = -\frac{33}{10} \quad \text{e)} x = \frac{365}{19} \quad y = -\frac{635}{19} \quad z = -\frac{142}{19} \quad w = \frac{40}{19}$$

$$\text{f)} x = 2 \quad y = -1 \quad z = -1 \quad w = -2$$

$$5.8 \quad \text{a)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ -1 & 0 & 2/5 \end{bmatrix} \quad \text{b)} -\frac{1}{49} \begin{bmatrix} -14 & -7 & 0 \\ -10 & 9 & -7 \\ 11 & -5 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{c)} \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & -8 & 8 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d)} \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & -5 & 5 \\ -3 & 9 & 5 & -5 \\ 1 & -3 & 5 & 15 \end{bmatrix} \quad \text{e)} \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 8 & 1 \\ 6 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{f)} \frac{1}{98} \begin{bmatrix} 2 & -22 & -24 & 6 \\ 23 & 41 & -31 & 20 \\ -21 & 35 & 7 & -14 \\ -13 & 45 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$5.9 \quad \text{a)} x = \frac{9}{7} \quad y = \frac{8}{7} \quad \text{b)} x = -\frac{34}{3} \quad y = \frac{61}{3} \quad z = -\frac{17}{3} \quad \text{c)} x = \frac{12}{5} \quad y = \frac{19}{5} \quad z = -\frac{6}{5}$$

$$\text{d)} x = \frac{12}{5} \quad y = \frac{4}{5} \quad z = \frac{6}{5} \quad \text{e)} x = -1 \quad y = 4 \quad z = 4 \quad \text{f)} x = -4 \quad y = \frac{7}{2} \quad z = -10 \quad w = 7$$

$$\text{g)} x = 2 \quad y = -1 \quad z = 1 \quad w = -2 \quad \text{h)} x = 1 \quad y = 2 \quad z = -2$$

$$5.10 \quad \text{a)} 46 \quad \text{b)} 30 \quad \text{c)} 24 \quad \text{d)} 22 \quad \text{e)} 42 \quad 5.11 \quad \text{a)} 0 \quad \text{b)} 0 \quad \text{c)} -1 \quad 5.12 \quad \text{a)} 5 \quad \text{b)} 5$$

$$5.15 \quad \text{a)} 2\vec{i} - 6\vec{j} + 17\vec{k} \quad \text{b)} 18\vec{i} - 12\vec{k} \quad \text{c)} 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{d)} -22\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$5.16 \quad \text{a)} -4\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k} \quad \text{b)} 18\vec{i} + 24\vec{j} \quad 5.18 \quad \text{a)} \alpha = 39,18^\circ \quad \text{b)} \alpha = 46^\circ$$

$$5.19 \quad \text{a)} -171 \quad \text{b)} 150 \quad \text{c)} -8\vec{i} - 53\vec{j} + 20\vec{k} \quad \text{d)} -35\vec{i} - 14\vec{k} \quad \text{e)} 28\vec{i} - 77\vec{j} - 70\vec{k} \quad \text{f)} -27$$

$$5.20 \quad \text{a)} 12,04 \quad \text{b)} 6$$

6.1 a) No reducida. Aunque el primer elemento distinto de cero en cada fila es igual a 1, en la segunda columna hay dos 1, lo que viola la característica **a**.

- b) No reducida, ya que viola la característica **a** porque hay un 2 por encima del 1 de la segunda fila.
- c) No reducida, por la presencia de -3 en la tercera columna, lo que viola la característica **a**.
- d) No reducida, porque el primer elemento de la única fila es distinto a 1, lo que viola la característica **a**.
- e) No reducida porque viola la característica **a**.
- f) No reducida porque la fila 2, formada por ceros, está por debajo de la fila 1, que tiene dos elementos distintos de cero, lo que viola la característica **c**.
- g) Matriz reducida h) Matriz reducida i) Matriz reducida

6.2 a) 2 b) 2 c) 3 d) 1 e) 3 f) 2 g) 2 h) 3 i) 4

6.3 a) $x=2$ $y=-3$ $z=-1$ b) $x=5$ $y=2$ $z=-4$ c) $x=-0,57$ $y=-1,21$ $z=-2,14$

d) $x=6$ $y=-2$ $z=2$ e) $x=-0,6$ $y=1,1$ $z=0,35$ f) $x=8$ $y=4$ $z=0$

g) $x=\frac{1}{4}$ $y=\frac{1}{2}$ $z=-\frac{1}{2}$ h) $x=-0,95$ $y=0,2$ $z=0,35$ i) $x=-8$ $y=2$ $z=5$

j) $x=-0,119$ $y=0,597$ $z=-0,105$ k) $x=11$ $y=-6,5$ $z=-1,5$

l) $x=-119$ $y=0,597$ $z=-0,104$ m) $x=-\frac{6}{5}$ $y=\frac{8}{25}$ $z=\frac{13}{25}$

n) $x=-\frac{9}{20}$ $y=\frac{9}{4}$ $z=-\frac{7}{20}$ o) $x=19,21$ $y=-33,42$ $z=-7,47$ $w=2,11$

p) $x=2$ $y=-1$ $z=1$ $w=-2$ q) $x=-2,09$ $y=-0,45$ $z=-1,64$

r) $x=10,138$ $y=0,0769$ $z=-1,708$ $w=-3,877$

6.4 a) Incompatible b) $x=1$ $y=-1$ $z=2$ c) $x=5$ $y=4$ $z=3$ d) Incompatible

e) $x=-\frac{1}{4}$ $y=\frac{5}{2}$ $z=-1$ f) $x=-3$ $y=0$ $z=-5$ g) Indefinido h) $x=-1$ $y=-2$ $z=4$

6.5 a) $x=1$ $y=-2$ $z=-1$ b) $x=1$ $y=1$ $z=\frac{8}{3}$ $w=-2$ c) $x=1$ $y=-6$ $z=-5$

d) $x=1$ $y=1$ $z=-\frac{1}{3}$ $w=-3$ e) $x=1$ $y=-\frac{5}{4}$ $z=\frac{5}{2}$ f) $x=1$ $y=\frac{4}{21}$ $z=\frac{43}{21}$ $w=\frac{16}{21}$

g) Incompatible h) $x=1$ $y=1$ $z=1$ $w=-3$ $t=-1$

6.6 a) Incompatible b) $x=5$ $y=4$ $z=3$ c) $x=-2$ $y=-1$ d) $x=3$ $y=-2$ $z=1$

e) Incompatible f) Incompatible g) Incompatible h) Incompatible

6.7 a) Solución trivial b) Infinitas soluciones. $x=0$ $y=\frac{3}{2}$ $z=1$ c) Solución trivial

d) Infinitas soluciones. $x=1$ $y=2$ $z=0$ e) Infinitas soluciones. $x=\frac{2}{3}$ $y=1$ $z=1$ $w=-\frac{8}{3}$

f) Solución trivial g) Solución trivial h) Solución trivial

i) Infinitas soluciones. $x = -\frac{1}{4}$ $y = \frac{7}{4}$ $z = 1$ j) Solución trivial

6.8 a) $\text{CH}_4 + 2\text{O}_2 \rightarrow \text{CO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$ b) $2\text{C}_3\text{H}_8 + 7\text{O}_2 \rightarrow 6\text{CO} + 8\text{H}_2\text{O}$

c) $4\text{HN}_3 + 7\text{O}_2 \rightarrow 12\text{NO}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$

d) $2\text{KMnO}_4 + 3\text{H}_2\text{C}_2\text{O}_4 \rightarrow \text{K}_2\text{CO}_3 + 2\text{MnO}_2 + 3\text{H}_2\text{O} + 5\text{CO}_2$

e) $2\text{KClO}_3 + 3\text{S} \rightarrow 2\text{KCl} + 3\text{SO}_2$ f) $5\text{H}_2\text{O}_2 + \text{Br}_2 \rightarrow 4\text{H}_2\text{O} + 2\text{HBr}$

7.1 a) Si b) No c) Si d) No e) No f) Si

7.2 a) $3iz^3 + 3z^2 - (2i + 1)z - 3i + 1$ b) $3iz^4 + 5z^3 + (1 - 2i)z^2 - (4 + 2i)z + 1 + 4i$

c) Cociente: $3iz - 4$ Residuo: $-11iz$ c) Cociente: $3iz^2 - z - 7i$ Residuo: $11(z + 1)$

7.3 a) 134 b) 0 c) 0 d) $4 + 13i$ e) 4

7.4 a) No b) Si c) Si d) Si e) No f) Si

7.5 a) 9 b) 24 c) -4 d) 3 e) -2 f) $a + b + c$

7.6 Cociente	Residuo
a) $2x^2 + x + 1$	7
b) $3x^3 - 9x^2 + 22x - 62$	136
c) $z^4 - z^3 + 4z^2 - 11z + 44$	-170
d) $2x^2 + 7x - \frac{1}{2}$	$-\frac{33}{4}$
e) $-2z^3 - 2z^2 - 6z + 17$	0
f) $2x^3 + 7x^2 - 7x + 5$	10
g) $x^2 - (2 - i)x + 1 - 2i$	$-1 + i$
h) $x - 3 - 2i$	2
i) $z^3 - (2 - 1)z^2 - (1 + i)z - 2i$	$1 - 2i$
j) $x^5 + (1 - i)x^4 - 2ix^3 - (4 + 2i)x^2 + (6 - 2i)x - 4 + 8i$	$6 + 12i$
k) $x - \frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
l) $5x^3 + \frac{25}{2}x^2 + \frac{35}{4}x + \frac{105}{8}$	$\frac{339}{8}$
m) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{7}{27}$	$\frac{41}{27}$
n) $\frac{1}{2}x^6 - \frac{3}{4}x^5 + \frac{9}{8}x^4 - \frac{27}{16}x^3 + \frac{81}{32}x^2 - \frac{243}{64}x + \frac{729}{128}$	$-\frac{2.699}{128}$

- 7.8** a) $k = -25$ b) $k = \frac{36}{17}$ c) $k = -3$ d) $k = \frac{8}{3}$
- 7.9** a) N0 b) Si c) Si
- 7.10** a) $x^3 + 2x^2 - 11x - 12$ b) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$
 c) $x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 8x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ d) $x^3 - 15x + 4$
 e) $x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 5x - 3$ f) $x^5 - x^4 - 17x^3 + 65x^2$
- 7.11** a) $x = 2$ (Doble raíz); $x = -1$ (Triple raíz)
 b) $x = \pm 4$; $x = -1$; $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ (Raíces simples)
 c) $x = 1$ (Raíz simple); $x = -1$ (Doble raíz)
 d) $x = -\frac{1}{2}$; $x = 2 \pm 2\sqrt{3}i$; $x = -2 \pm 2\sqrt{3}i$ (Raíces simples)
 e) $x = 0$ (Triple raíz); $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$ (Raíces simples)
- 7.12** a) $(x-1)(x^2-6x+10)$ b) $(x+3)(x^2-14x+53)$ c) $x(x-3)(x^2+1)$
 d) $(x^2+2)(x^2-4x+5)$ e) $(x-2)(x-\sqrt{2})(x^2-2\sqrt{3}x+4)$
 f) $(x-4)(x^2-2x-4)(x^2-4x+13)$
- 7.13** a) $x = 4$ $x = 1$ b) $x = -2\sqrt{3}$ $x = \pm 2i$ c) $x = 1 + 5i$ $x = 1 \pm \sqrt{3}$
 d) $x = 1$ $x = -\frac{7}{2}$ e) $x = 1 - 3i$ $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}i$ f) $x = 2 - \sqrt{5}$ $x = 7 - 2i$
- 7.14** a) 3; ± 2 b) ± 1 ; $\pm i$ c) -3 ; -1 ; $0,60$; $0,30 \pm 0,81i$ d) 3; $-3,83$; $1,83$
 e) 5; -2 ; -1 f) -2 ; 5; -1 (Doble raíz) g) 3; 2; -2 h) $-1 \pm i$; $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- 7.15** a) $x = \frac{3}{4}$ b) $x = \frac{2}{3}$ c) $x = \frac{1}{4}$ d) $x = \pm \frac{1}{2}$ e) No tiene f) $x = \frac{1}{2}$
 g) $x = \frac{1}{2}$ h) $x = \frac{1}{3}$
- 7.16** a) $\frac{4/3}{x-4} - \frac{1/3}{x-1}$ b) $\frac{4/5}{x} + \frac{17/10}{x-5} - \frac{5/2}{x-3}$ c) $\frac{-7/9}{x} + \frac{8/3}{x^2} + \frac{7/9}{x-3}$
 d) $\frac{1/2}{x+1} - \frac{1/2}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$ e) $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1}$ f) $\frac{i}{x+i} - \frac{i}{x-i} + \frac{3+i}{x+2i} + \frac{3-i}{3-2i}$
 g) $\frac{2}{s+1} - \frac{3/2}{s+3/2}$ h) $\frac{5/2}{s^2} - \frac{5/8}{s+2i} + \frac{5/8i}{s-2i}$ i) $\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{1/2+i}{s+i} - \frac{1/2-i}{s-i}$

7.17 a) $x = \pm\sqrt{3}$ $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ b) $x = \pm 1,17$ $x = \pm 2,71i$ c) $x = \pm\frac{1}{4}$ $x = \pm 3$
 d) $x = 1$ $x = 2$ $x = -2$ $x = -3$ e) $x = 1,729$ f) $x = \frac{1}{8}$ $x = -\frac{1}{64}$

8.1 a) $x < 5$ b) $x < 5$ c) $x \leq 5$ d) $x \leq \frac{1}{2}$ e) $x \geq 6$ f) $x < \frac{96}{7}$
 g) $x \geq 3$ h) $x \geq 7$ i) $x \leq 5$ j) $\frac{5}{3} < x \leq 7$ k) $-3 \leq x < 2$ l) $1 \leq x \leq \frac{7}{2}$
 m) $-4 < x \leq 12$ n) $\frac{10}{9} \leq x \leq 5$ o) $-3 \leq x < 2$ p) $-6 < x \leq 4$ q) $-2 \leq x \leq 1$
 r) $-4 < x \leq 4$

8.2 $60 < x < 100$ **8.3** $1 < x < 2$ **8.4** $\frac{200}{9} < x < \frac{400}{9}$

8.5 a) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$ b) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ c) $-3 < x < 3$ d) $-7 < x < 7$
 e) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ f) $(-\infty, 1] \cup [\frac{7}{3}, \infty)$ g) $(-\infty, \frac{3}{4}] \cup [\frac{9}{4}, \infty)$ h) $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (3, \infty)$
 i) $0 < x < 1$ j) $-4 \leq x \leq -2$ k) No hay solución l) $-\frac{11}{8} \leq x \leq \frac{13}{8}$
 m) $-3 \leq x \leq \frac{1}{4}$ n) $(-\infty, -5) \cup (-1, \infty)$ o) $-3 < x < -\frac{1}{4}$

8.6 a) $1 < x < 6$ b) $x \leq 3$ c) $(-\infty, \frac{9}{5}) \cup [2, \infty)$ d) $1 \leq x < 4$ e) $1 < x < 4$
 f) $(-7 \leq x \leq -3) \cup (x > 3)$ g) $-4 < x < 5$ h) $-2 < x < 0$ i) $x = \{\phi\}$

8.7 a) $\mathbb{R} - \{0\} - \{\frac{1}{4}\}$ b) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$ c) $-3 < x \leq 5$ d) $2 \leq x \leq 3$
 e) $x > \frac{1}{2}$ f) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{7}\}$

8.8 a) $\{\phi\}$ b) $(-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$ c) $\mathbb{R}$ d) $-5 < x < \frac{1}{3}$ e) $-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$ f) $0 \leq x \leq \frac{5}{3}$
 g) $x \geq -16$ h) $x \leq -\frac{1}{4}$ i) $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

8.9 a) $\mathbb{R}$ b) $\mathbb{R}$ c) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$ d) $(-\infty, -4) \cup (-2, \infty)$ e) $\mathbb{R} - \{4 < x < 5\}$
 f) $\{\phi\}$ g) $\mathbb{R} - \{1\} - \{6\}$

9.1 a) $x^2 + y^2 = 9$ b) $x^2 + (y + 3)^2 = 5$ c) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ d) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$
 e) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ f) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 3$

9.2 a) $r = \sqrt{7}$ C(0,0) b) $r = 3$ C(2,0) c) $r = 5$ C(0,3) d) No
 e) $r = \sqrt{10}$ C(1,-5) f) $r = 2$ C(2,0) g) $r = 1$ C($\frac{1}{2}$, -3) h) No

9.3 a) $r = \frac{\sqrt{30}}{2}$ $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ b) $r = 9$ $C(3, 4)$ c) $r = \sqrt{\frac{21}{4}}$ $C(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4})$
 d) $r = 4$ $C(2, 0)$ e) La circunferencia se reduce a un punto. f) $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $C(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

9.4 a) $(x-6)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{53}{4}$ b) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 34$

9.6 a) $2a = 10$ $2b = 8$ $F(3, 0)$ $F'(-3, 0)$ $e = \frac{3}{5}$
 b) $2a = 12$ $2b = 6\sqrt{3}$ $F(3, 0)$ $F'(-3, 0)$ $e = \frac{1}{2}$
 c) $2a = 10$ $2b = 8$ $F(3, 0)$ $F'(-3, 0)$ $e = \frac{3}{5}$
 d) $2a = 6$ $2b = 4$ $F(\sqrt{5}, 0)$ $F'(-\sqrt{5}, 0)$ $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

9.7 a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ c) $\frac{4x^2}{37} + \frac{2y^2}{3} = 1$ d) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{1} = 1$

9.8 $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$ **9.9** a) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$ b) $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{25} = 1$

9.10 a) Si b) Si c) Si d) No e) Si f) No

9.11 a) $\frac{(x+5)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$ b) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{64} = 1$ c) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$
 d) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y+4)^2}{7} = 1$

9.12 a) $V(\pm 4, 0)$ $F(\pm \sqrt{21}, 0)$ $2a = 8$ $2b = 2\sqrt{5}$ $e = \frac{\sqrt{21}}{4}$ $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{4}x$
 b) $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$ $F(\pm 4, 0)$ $2a = 4\sqrt{2}$ $2b = 4\sqrt{2}$ $e = \sqrt{2}$ $y = \pm x$
 c) $V(\pm 3, 0)$ $F(\pm 4, 0)$ $2a = 6$ $2b = 2\sqrt{7}$ $e = \frac{4}{3}$ $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}x$
 d) $V(4, 3)$ $V'(0, 3)$ $F(2 \pm \sqrt{13}, 3)$ $2a = 4$ $2b = 6$ $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$ $y - 3 = \pm \frac{3}{2}(x - 2)$
 e) $V(5, 2)$ $V'(-1, 2)$ $F(2 \pm \sqrt{10}, 2)$ $2a = 6$ $2b = 2$ $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$ $y - 2 = \pm \frac{1}{3}(x - 2)$
 f) $V(-1, 2)$ $V'(-7, 2)$ $F(-4 \pm \sqrt{13}, 2)$ $2a = 6$ $2b = 4$ $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$ $y + 4 = \pm \frac{2}{3}(x - 2)$
 g) $V(\pm \frac{\sqrt{5}}{5}, 0)$ $F(\pm \sqrt{\frac{7}{10}}, 0)$ $2a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $2b = \sqrt{2}$ $e = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ $y = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}x$
 h) $V(\pm \frac{1}{3}, 3)$ $F(\pm \frac{\sqrt{10}}{3}, 3)$ $2a = \frac{2}{3}$ $2b = 1$ $e = \sqrt{10}$ $y - 3 = \pm 3x$
 i) $V(-1, 3 \pm 2\sqrt{2})$ $F(-1, 3 \pm \sqrt{13})$ $2a = 4\sqrt{2}$ $2b = 2\sqrt{5}$ $e = \frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}$ $y + 1 = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}(x - 3)$
 j) $V(-4 \pm 4\sqrt{2}, 1)$ $F(-4 \pm 4\sqrt{\frac{10}{3}}, 1)$ $2a = 8\sqrt{2}$ $2b = 32\frac{\sqrt{3}}{3}$ $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$ $y - 1 = \pm \frac{4}{\sqrt{6}}(x + 4)$

$$\mathbf{k)} V(4 \pm \sqrt{5}, 3) \quad F(4 \pm \sqrt{26}, 3) \quad 2a = 2\sqrt{5} \quad 2b = 2 \quad e = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{5}} \quad y - 3 = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}(x - 4)$$

$$\mathbf{l)} V(3 \pm 2\sqrt{3}, -2) \quad F(3 \pm \sqrt{30}, -2) \quad 2a = 4\sqrt{3} \quad 2b = 6\sqrt{2} \quad e = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad y + 3 = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}(x - 3)$$

$$\mathbf{9.13} \quad \frac{y^2}{4} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1 \quad F(-3 \pm \sqrt{13}) \quad e = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad \mathbf{9.14} \quad \frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

$$\mathbf{9.15} \quad \mathbf{a)} V(0, 0) \quad F\left(\frac{1}{8}, 0\right) \quad x = -\frac{1}{8} \quad \mathbf{b)} V(0, 0) \quad F\left(0, \frac{1}{16}\right) \quad y = -\frac{1}{16}$$

$$\mathbf{c)} V(0, 0) \quad F(-25, 0) \quad x = 25 \quad \mathbf{d)} V(0, 0) \quad F(0, -4) \quad y = 4$$

$$\mathbf{e)} V(0, 0) \quad F\left(-\frac{5}{4}, 0\right) \quad x = \frac{5}{4} \quad \mathbf{f)} V(1, 0) \quad F(4, 0) \quad x = -2$$

$$\mathbf{g)} V(5, 3) \quad F\left(5, \frac{47}{16}\right) \quad y = \frac{49}{16} \quad \mathbf{h)} V(1, 4) \quad F(3, 4) \quad x = -1$$

$$\mathbf{i)} V(2, -2) \quad F\left(2, -\frac{7}{4}\right) \quad y = -\frac{9}{4} \quad \mathbf{j)} V\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad F\left(0, \frac{3}{2}\right) \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$\mathbf{k)} V(-2, 0) \quad F\left(0, -\frac{11}{6}\right) \quad x = -\frac{13}{6} \quad \mathbf{l)} V\left(0, \frac{1}{2}\right) \quad F\left(0, -\frac{9}{2}\right) \quad y = \frac{11}{2}$$

$$\mathbf{m)} V(1, -7) \quad F(0, -7) \quad x = 2 \quad \mathbf{n)} V\left(\frac{7}{4}, 0\right) \quad F\left(\frac{3}{4}, 0\right) \quad x = \frac{11}{4}$$

$$\mathbf{10.4} \text{ Infinitas} \quad \mathbf{10.5} \text{ 10} \quad \mathbf{10.6} \text{ a) 6 b) 4} \quad \mathbf{10.7} \text{ Infinitos} \quad \mathbf{10.8} \text{ Si} \quad \mathbf{10.9} \text{ Si}$$

$$\mathbf{10.13} \quad \mathbf{a)} x = -1 + 3t \quad y = 2 - 2t \quad z = 5 + 4t \quad \mathbf{b)} x = 3t \quad y = -5 - 2t \quad z = 7 + 4t$$

$$\mathbf{c)} x = -5 + 4t \quad y = 2 + 6t \quad z = -3 + 2t \quad \mathbf{d)} x = 1 \quad y = 1 + t \quad z = 1$$

$$\mathbf{10.14} \quad \mathbf{a)} x = 2 - 5t \quad y = 3 + t \quad z = 4 + t \quad \mathbf{b)} x = -4 - t \quad y = 4t \quad z = -2t$$

$$\mathbf{c)} x = 2 + t \quad y = -t \quad z = -2 + 4t \quad \mathbf{d)} x = 1 - 3t \quad y = 3 + t \quad z = 5 + t$$

$$\mathbf{10.15} \quad \mathbf{a)} x = 5 + 3t \quad y = -2 - t^2 \quad z = 3 + t \quad \mathbf{b)} x = 2 \quad y = 2 + t \quad z = 2$$

$$\mathbf{c)} x = t \quad y = 0 \quad z = 0$$

$$\mathbf{10.16} \quad \mathbf{a.1)} 2x - y + 3z = 19 \quad \mathbf{a.2)} 3x - 2y + z = 23 \quad \mathbf{a.3)} 2x + y - 3z = -10 \quad \mathbf{a.4)} x + y + z = 1$$

$$\mathbf{b)} 15x + 10y + 6z = 30 \quad \mathbf{c.1)} 2x - 4y + 2z = 0 \quad \mathbf{c.2)} x - y + z = 2 \quad \mathbf{c.3)} 2x + y - 15z = -67$$

$$\mathbf{c.4)} 10x + 10y - 10z = -40 \quad \mathbf{d)} 2x - 3y + 5z = 7 \quad \mathbf{e)} x = 2$$

$$\mathbf{10.17} \quad \mathbf{a)} \text{ Intercepo con X: } (4, 0, 0) \quad \text{Intercepo con Y: } (0, -2, 0) \quad \text{Intercepo con Z: } (0, 0, 4/3)$$

$$\mathbf{b)} \text{ Intercepo con X: } (4, 0, 0) \quad \text{Intercepo con Y: } (0, 6, 0) \quad \text{Intercepo con Z: } (0, 0, -2)$$

$$\mathbf{10.18} \quad \mathbf{a)} \theta = 34,76^\circ \quad \mathbf{b)} \theta = 61,87^\circ \quad \mathbf{c)} \theta = 72,08^\circ$$

11.1 a) 80.640 b) 56 c) 66 d) 60 e) 1

11.3 a) $x^4 + 16y^4 + 32xy^3 + 24x^2y^2 + 8x^3y$ b) $x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32$

c) $27a^3 - b^3 + 9ab^2 - 27a^2b$ d) $x^5 + y^{10} + 5xy^8 + 10x^2y^6 + 10x^3y^4 + 5x^4y^2$

e) $\frac{1}{x^6} + \frac{6}{x^4} - \frac{15}{x^2} + x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20$ f) $\frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6} - \frac{6}{x^5y} - \frac{6}{xy^5} + \frac{15}{x^2y^4} - \frac{20}{x^3y^3} + \frac{15}{x^4y^2}$

g) $\frac{x^6}{64} + 64y^6 - 96xy^5 + 60x^2y^4 - 20x^3y^3 + \frac{15x^4y^2}{4} - \frac{3x^5y}{8}$ h) 1

11.4 a) $10x^3y$ b) $20x^9y^3$ c) $\frac{35}{x}$ d) $-32x$

11.5 a) $126x^4y^5$ b) $54a^2b^2$ c) $7x^3\sqrt{y}$ d) 20

12.1 a) 120 12.2 a) 840 b) 288 12.3 n = 5 12.4 60

12.5 79.833.600 12.6 a) 720 b) 120 c) 120 12.7 720 12.8 25 12.9 10

12.10 a) 126 b) 6.435 c) 4.950 d) 4.950 12.12 220 12.13 28 12.14 84

12.15 12.16 a) 350 b) 200 c) 105 12.17 350

13.1 a) $\bar{x}_A = 17$ A no tiene moda $\tilde{x} = 17$ $\sigma_A = 6,44$

b) $\bar{x}_B = 17$ B no tiene moda $\tilde{x} = 17$ $\sigma_A = 6$

13.2 $\bar{x} = 509,68$ Moda: 423, 482, 642 Rango = 428 $\tilde{x} = 503,5$ $\sigma = 98,10$

13.3 $\bar{x} = 136,05$ Clase modal: 136 – 140 $\tilde{x} = 138$ $\sigma = 10,54$

14.2 a) $S = \{ccc, ccs, csc, css, scc, scs, ssc, sss\}$ b) Si c) $P = \frac{1}{8}$ d) $P = \frac{1}{2}$ e) $P = \frac{3}{8}$

14.3 a) $S = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$

b) $\{c_1\}, \{c_2\}, \{c_3\}, \{c_4\}, \{c_5\}, \{c_6\}, \{s_1\}, \{s_2\}, \{s_3\}, \{s_4\}, \{s_5\}, \{s_6\}$ c) $P = \frac{1}{12}$

14.4 a) $S = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ b) $P = \frac{1}{29}$ c) $P = \frac{5}{29}$ d) $P = \frac{8}{29}$

14.5 a) $P = \frac{1}{6}$ b) $P = \frac{4}{9}$ 14.6 a) $P = \frac{5}{33}$ b) $P = \frac{4}{33}$ c) $P = \frac{28}{33}$

14.7 a) $P = \frac{3}{25}$ b) $P = \frac{2}{15}$ c) $P = \frac{2}{15}$

14.8 a) $P = \frac{1}{2}$ b) $P = \frac{1}{2}$ c) $P = \frac{19}{100}$ d) $P = \frac{9}{10}$ e) $P = \frac{6}{25}$ f) $P = \frac{1}{10}$ g) $P = \frac{27}{100}$

14.9 a) Mutuamente excluyentes. $E \cup F = \{\text{Todos los números del 1 al 100}\}$

$$E \cap F = \{\emptyset\} \quad P(E \cup F) = 1$$

b) No son mutuamente excluyentes.

$$E \cup F = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 50, 52, 54, 55, 56, 58, 60, 62, 64, 65, 66, 68, 70, 72, 75, 76, 78, 80, 82, 84, 85, 86, 88, 90, 92, 94, 95, 96, 98, 100\}$$

$$E \cap F = \{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\} \quad P(E \cup F) = \frac{59}{100}$$

c) Mutuamente excluyentes. $E \cup F = \{1, 2, \dots, 49\} \cup \{76, 77, \dots, 100\} \quad E \cap F = \{\emptyset\}$

$$P(E \cup F) = \frac{37}{50}$$

d) No son mutuamente excluyentes.

$$E \cup F = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92\} \quad E \cap F = \{12\}$$

$$P(E \cup F) = \frac{8}{50}$$

e) Mutuamente excluyentes.

$$E \cup F = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 20, 21, 23, 25, 25, 27, 29, 30, 30, 31, 33, 35, 37, 39, 40, 41, 43, 45, 47, 49, 50, 51, 53, 55, 57, 59, 60, 61, 63, 65, 67, 69, 70, 71, 73, 75, 77, 79, 80, 81, 83, 85, 87, 89, 90, 91, 93, 95, 97, 99, 100\}$$

$$E \cap F = \{\emptyset\} \quad P(E \cup F) = \frac{59}{100}$$

f) Mutuamente excluyentes. $E \cup F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$

$$E \cap F = \{\emptyset\} \quad P(E \cup F) = \frac{9}{50}$$

$$\mathbf{14.10} \quad \mathbf{a)} \quad P' = \frac{3}{4} \quad \mathbf{b)} \quad P' = \frac{4}{5} \quad \mathbf{14.11} \quad P(E/F) = \frac{1}{2} \quad P(F/E) = \frac{2}{7} \quad \mathbf{14.12} \quad P = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{14.13} \quad \mathbf{a)} \quad P = \frac{1}{69} \quad \mathbf{b)} \quad P = \frac{1}{221} \quad \mathbf{14.14} \quad \mathbf{a)} \quad P = \frac{8}{225} \quad \mathbf{b)} \quad P = \frac{4}{91}$$

$$\mathbf{14.15} \quad \mathbf{a)} \quad P = \frac{1}{4} \quad \mathbf{b)} \quad P = \frac{5}{24} \quad \mathbf{c)} \quad P = \frac{13}{24}$$

$$\mathbf{14.16} \quad \mathbf{a)} \quad P = \frac{5}{9} \quad \mathbf{b)} \quad P = \frac{4}{9} \quad \mathbf{c)} \quad P = \frac{1}{6}$$

1. Figuera J., Matemática 1er año bachillerato, editor: Júpiter Figuera, marzo 2018.
2. Figuera J., Matemática 2do año bachillerato, editor: Júpiter Figuera, marzo 2018.
3. Figuera J., Matemática 3er año bachillerato, editor: Júpiter Figuera, marzo 2018.
4. Figuera j., Matemática 4to año bachillerato, editor: Júpiter Figuera, abril 2018.
5. Allendoerfer, C., Oakley, C. Fundamentos de Matemáticas Universitarias, Mc Graw Hill Co., New york, 1973.
6. Giménez Romero, J., Matemática V, Edic. Vega, Caracas, 1973.
7. González J *et al.*, Matemática II, Univ. nacional Abierta, Caracas, 1986.
8. Bernard, K, Elementary Linear Algebra, MacMillan Pub. Co., New York, 1970.
9. Nowlan N., Lessons in College Algebra, Harper & Row Publishers, New York, 1978.
10. Sienko, M. J., Problemas de Química, Editorial Reverté, México, 1973.

ÍNDICE ALFABÉTICO

A

Adición de matrices
 propiedad asociativa 77
 propiedad conmutativa 76
 Adición de polinomios 195
 Adición de vectores 22
 elemento neutro en la 23, 25
 propiedad asociativa de la 23
 propiedad conmutativa de la 23
 Álgebra vectorial 22
 Asíntotas de la hipérbola 289
 Axioma
 de Euclides 313
 Axiomas 307
 de incidencia 310
 de paralelismo 313
 Axiomático
 método 306
 sistema 307

B

Balaceo de ecuaciones químicas 190
 Base canónica en $\mathbb{R}^3$ 60
 Base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ 59
 Bicuadradas
 ecuaciones 237
 Bimodal, conjunto 352

C

Canónica
 base 60
 Circunferencia 270
 Circunferencia en el plano XY
 definición de 268
 Clase modal 352
 Coeficientes indeterminados
 método de los 232
 Combinación lineal
 nula 55
 trivial 55
 Combinaciones 345
 Cónicas
 secciones 267, 269

Curva en el plano XY
 definición de 268

D

Demostración 307
 Desigualdades
 propiedad de adición 243
 propiedad de multiplicación 243
 propiedad transitiva 241
 Desviación estándar 356
 Desviación media 356
 Desviación promedio 356
 Dimensión del espacio vectorial
 $\mathbb{R}^3$ 59
 Distancia entre dos puntos
 en el plano 267
 División de polinomios 197
 División sintética 204

E

Ecuación de la recta
 forma simétrica de la 323
 Ecuación del plano 318
 Ecuaciones bicuadradas 237
 Ecuaciones paramétricas de la
 recta 314
 Elipse
 con centro fuera del origen 283
 con el eje focal en el eje Y 281
 distancia focal de una 275
 ecuación canónica de una 276
 eje mayor de una 277
 eje menor de una 277
 excentricidad de una 278
 focos de una 275
 Elipse, la 275
 Espacio, el 3
 Espacio muestral 362
 Espacio $\mathbb{R}^3$ 5
 Espacio $\mathbb{R}^3$, definición del 7
 Eventos independientes 374
 Expansión en fracciones parciales 233

F

Factorial

definición de 326

Factoriales

fórmula recursiva para 326

Factorización de polinomios 230

Fracciones parciales

expansión en 233

H

Hipérbola

asíntotas de una 289

centro de una 288

eje conjugado de una 289

eje focal de una 288

eje no transversal de una 289

eje normal de una 288

eje transversal de una 288

Hipérbola la 288

Histograma 349

I

Inecuación

compuesta 246

con valor absoluto 249

de segundo grado 257

definición 240

equivalente 245

miembros de una 240

racional 253

Inecuación lineal 244

solución de una 244

Inecuaciones

sistemas de 252

Intervalo en $\mathbb{R}$

abierto 241

al infinito 241

cerrado 240

semiabierto 241

Inversa de una matriz cuadrada 90

L

Lugar geométrico

definición de 268

M

Matrices

adición de 74

igualdad de 73

multiplicación de 79

operaciones elementales por
filas 84

sustracción de 78

Matriz

columna 72

columnas de una 70

cuadrada de orden n 71

de las incógnitas 98

de los coeficientes 98

de los términos independien-
tes 98

diagonal 72

principal de una 72

elementos de una 70

equivalente por columnas 84

equivalente por filas 84

fila de una 72

filas de una 70

identidad 72

 $m \times n$ 71

nula 72

opuesta 75

rango de una 158, 160

reducida 158

transpuesta de una 73

unidad 72

Matriz cuadrada

inversa de una 90

Matriz inversa

para resolver sistemas de
ecuaciones 97

Media aritmética 351

Mediana 352

Medidas de dispersión 355

Medidas de tendencia central 351

Método axiomático, el 306

Método de los coeficientes indeterminados 232

Método deductivo 307

Moda, la 352

Multiplicación de matrices 79

por la matriz identidad 82

propiedad asociativa en la 82

propiedad conmutativa en la 84

- propiedad distributiva 83
- propiedades 82
- Multiplicación de polinomios 196
- Multiplicación de un escalar por una matriz 77
- Multiplicación de un vector por un escalar
- elemento neutro en la 29
- N**
- Números combinatorios 327
- complementarios 328
- Números directores de un vector 319
- P**
- Parábola en el plano XY
- definición de 268
- Pascal, triángulo de 330
- Permutaciones 338
- Plano
- ecuación del 318
- Plano, el 2
- Plano R^2 , el 4
- Polígono de frecuencias 349
- Polinomio
- ceros de un 198
- divisibilidad por $z - a$ 201
- división por un binomio de la forma $az + b$ 208
- raíces complejas de un 218
- raíces de un 198
- raíz de multiplicidad k 214
- raíz simple 214
- valor numérico de un 198
- Polinomios
- adición de 195
- conceptos básicos 194
- división de 197
- factorización de 230
- grado de un 194
- multiplicación de 196
- teorema de la factorización de 203
- términos de un 194
- Postulados 307
- Principio aditivo de conteo 334
- Principio fundamental de conteo 335
- Probabilidad
- definición a posteriori 361
- definición a priori 359
- Probabilidad condicional 371
- Producto escalar
- propiedades 67
- Producto escalar de dos vectores 64
- Punto, el 1
- Puntos
- colineales 3, 308
- coplanarios 3, 308
- en el espacio R^3 5
- en el origen de R^3 9
- en el plano R^2 4
- sobre los ejes de R^3 9
- sobre los planos XY, XZ y ZY de R^3 9
- Puntos notables en R^3 9
- R**
- Raíces de un polinomio
- determinación de las 223
- número y naturaleza 212
- Rango de una matriz 158, 160
- Recta en el espacio
- ecuación de una 313
- ecuaciones paramétricas de la 314
- parámetro de una 314
- Recta en el plano XY
- definición de 268
- Recta, la 2
- Rectas
- concurrentes 3, 308
- coplanarias 3, 308
- paralelas 3, 308
- Regla de Ruffini 204
- S**
- Secciones cónicas 267, 269
- Sistema de ecuaciones
- compatible 156
- homogéneo 155
- incompatible 156
- no homogéneo 156
- solución trivial 155
- Sistema de ecuaciones lineales 154
- Sistema de ecuaciones no homogéneas estudio de 170

- Sistemas homogéneos
 - estudio de 187
- Sistema de ecuaciones
 - determinado 157
 - equivalentes 157
 - indeterminado 157
- Sistemas de ecuaciones homogéneas
 - solución de 162
- Solución trivial
 - de un sistema de ecuaciones homogéneos 155
- Sustracción de matrices 78
- T**
 - Teorema de la factorización 203
 - Teorema del binomio 330
 - Teorema del residuo 201
 - Teorema fundamental del álgebra 213
 - Teorema, definición de 307
 - Ternas ordenadas 6
 - Transpuesta
 - de una matriz 73
 - Triángulo de Pascal 330
- U**
 - Unimodal, conjunto 352
- V**
 - Variaciones 340
 - Varianza 356
 - Vector
 - de posición 14
 - multiplicación por un número real 26
 - representante canónico de un 14
 - simétrico u opuesto 25
 - Vector libre 14
 - Vector libre en $\mathbb{R}^3$ 15
 - Vector suma
 - representación geométrica del 23
 - Vectores
 - adición de 22
 - aplicación en la Física 35
 - combinación lineal de dos 48
 - en el espacio $\mathbb{R}^3$ 14
 - en el plano 11
 - linealmente dependientes 55
 - linealmente independientes 57
 - producto escalar de dos 64
 - representación en el plano 11
 - sustracción de 33
 - Vectores en el plano
 - componentes de 11
 - dirección de 11
 - equipolentes 14
 - forma polar de 12
 - módulo de 11
 - Vectores en $\mathbb{R}^3$
 - cosenos directores de 18
 - dirección 18
 - equipolentes 14
 - magnitud o norma de 16
 - representación espacial de 15
 - representación por sus componentes 14
 - Vectorial
 - álgebra 22